DATE : 27/05/2019

(हिन्दी संस्करण)

Aakash
Medical | IIT-JEE | Foundations
(Divisions of Aakash Educational Services Limited)
Regd. Office : Aakash Tower, 8, Pusa Road, New Delhi-110005
Ph.: 011-47623456 Fax : 011-47623472

Time : 3 hrs.

Answers & Solutions

Max. Marks: 186

for

JEE (Advanced)-2019

PAPER - 1

PART-I : PHYSICS

खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में चार **(04)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर के संगत विकल्प का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दिए गए अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक	:	**+3**	यदि केवल सही उत्तर चुना गया है;
शून्य अंक	:	**0**	यदि कोई भी विकल्प ना चुना गया हैं (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित हैं);
ऋणात्मक अंक	:	**–1**	अन्य सभी स्थितियों में।

1. त्रिज्या **R** के एक पतले गोलीय कुचालक कोश पर आवेश इस प्रकार एकसमान रूप से वितरित है कि इसकी सतह पर विभव V_0 है। शेष कोश को प्रभावित किये बिना कोश पर एक अल्प क्षेत्रफल $\alpha 4\pi R^2 (\alpha << 1)$ का एक छिद्र निर्मित किया जाता है, तब निम्न में से कौनसा कथन सही है?

(A) कोश के केन्द्र पर विभव में $2\alpha V_0$ तक कमी होती है

(B) कोश के केन्द्र पर विद्युत क्षेत्र के परिमाण में $\frac{\alpha V_0}{2R}$ तक कमी होती है

(C) गोलीय कोश के केन्द्र से **2R** दूरी पर छिद्र तथा कोश के केन्द्र से गुजरने वाली रेखा पर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के परिमाण में $\frac{\alpha V_0}{2R}$ तक कमी होती है

(D) कोश के केन्द्र पर विभव तथा केन्द्र से छिद्र की ओर $\frac{1}{2}R$ बिन्दु पर विभव का अनुपात $\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}$ होगा

उत्तर (D)

हल एकसमान रूप से वितरित आवेशित कोश के लिए पृष्ठीय आवेश घनत्व $(\sigma) = \frac{Q}{4\pi R^2}$

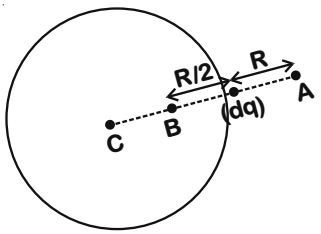
$\therefore$ अल्प क्षेत्रफल $(\alpha 4\pi R^2)$ का आवेश $dq = \alpha Q$

दिया है कि आवेश dq को हटाने से पहले सतह पर विभव $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$\therefore V_{\text{केन्द्र}} = V_0 - V_{(dq)}$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = V_0(1-\alpha)$$

तथा $V_B = V_0 - \frac{\alpha Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R}{2}\right)} = V_0(1-2\alpha)$



$\vec{E}$ के लिए अध्यारोपण का सिद्धान्त प्रयुक्त करने पर

$$E_A = \frac{kQ}{(2R)^2} - \frac{k\alpha Q}{(R)^2} = E_{\text{कोश}} - \frac{\alpha V_0}{R}$$

$$\Rightarrow \Delta E_A = -\frac{\alpha V_0}{R}$$

इसी प्रकार $\Delta E_c = \frac{\alpha V_0}{R}$

2. एक धारावाही तार धात्विक छड़ को गर्म करता है। तार छड़ को नियत शक्ति (P) प्रदान करता है। धात्विक छड़ एक कुचालक पात्र में परिबद्ध है। यह प्रेक्षित किया जाता है कि धात्विक छड़ में ताप (T) समय (t) के साथ निम्नानुसार परिवर्तित होता है

$$T(t) = T_0\left(1+\beta t^{\frac{1}{4}}\right)$$

जहाँ β उचित विमा के साथ नियतांक है जबकि T_0 ताप की विमा के साथ नियतांक है। धातु की ऊष्मा धारिता है

(A) $\frac{4P(T(t)-T_0)^2}{\beta^4 T_0^2}$ (B) $\frac{4P(T(t)-T_0)^4}{\beta^4 T_0^5}$ (C) $\frac{4P(T(t)-T_0)^2}{\beta^4 T_0^4}$ (D) $\frac{4P(T(t)-T_0)}{\beta^4 T_0^2}$

उत्तर (C)

हल धात्विक छड़ से ऊष्मा स्थानान्तरण की दर :

$$\frac{dQ}{dt} = C\frac{dT}{dt} = P(\text{नियतांक}) \quad \ldots (1)$$

तथा ताप परिवर्तन है

$$T = T_0\left(1+\beta t^{1/4}\right) \quad \ldots (2)$$

$$\therefore \frac{dT}{dt} = \frac{T_0\beta}{4} t^{-3/4}$$

समीकरण (1) से

$$C = \frac{P}{\left(\frac{dT}{dt}\right)} = \frac{4P}{\beta T_0} t^{3/4}$$

t का मान समीकरण (2) से प्रतिस्थापित करने पर

$$\boxed{C = \frac{4P(T-T_0)^3}{(\beta T_0)^4}}$$

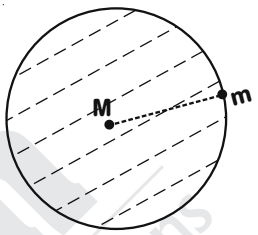
3. मुक्त त्रिविम में द्रव्यमान घनत्व $\rho(r)$ वाले गोलीय गैसीय बादल पर विचार कीजिये, जहाँ r इसके केन्द्र से अरीय दूरी है। गैसीय बादल समान द्रव्यमान m के उन कणों से निर्मित है जो समान गतिज ऊर्जा K के साथ उभयनिष्ठ केन्द्र के सापेक्ष गोलीय कक्षा में गतिशील है। कणों पर कार्यरत बल इनका अन्योन्य गुरूत्वाकर्षण बल है। यदि $\rho(r)$ समय में नियतांक है, तब कण का संख्या घनत्व $n(r) = \rho(r)/m$ है [G सार्वत्रिक गुरूत्वीय नियतांक है]

(A) $\frac{3K}{\pi r^2 m^2 G}$ (B) $\frac{K}{2\pi r^2 m^2 G}$ (C) $\frac{K}{6\pi r^2 m^2 G}$ (D) $\frac{K}{\pi r^2 m^2 G}$

उत्तर (B)

हल द्रव्यमान M के आंतरिक कोश के गुरूत्वाकर्षण के कारण r त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में घूर्णन करते हुए कण के लिए

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$



$$\therefore \quad M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{2mv^2 r}{2Gm}$$

चूँकि $K = \frac{1}{2}mv^2 =$ नियतांक, तब

$$M = \frac{2Kr}{Gm} \quad \text{या} \quad dM = \frac{2Kdr}{Gm}$$

संगत रूप से $dM = \rho(r) \times 4\pi r^2 dr$

$$\therefore \quad \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2Kdr}{Gm}$$

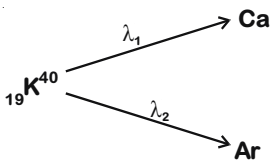
$$\therefore \quad \frac{\rho(r)}{m} = \frac{K}{2\pi G m^2 r^2}$$

4. एक रेडियो सक्रिय नमूने में $^{40}_{19}K$ नाभिक या तो क्षयांक 4.5×10^{-10} प्रति वर्ष के साथ स्थायी $^{40}_{20}Ca$ नाभिक में क्षयित होता है या क्षयांक 0.5×10^{-10} प्रति वर्ष के साथ स्थायी $^{40}_{18}Ar$ नाभिक में क्षयित होता है। दिया गया है कि इस नमूने में सभी स्थायी $^{40}_{20}Ca$ तथा $^{40}_{18}Ar$ नाभिक केवल $^{40}_{19}K$ नाभिक द्वारा उत्पन्न किये गये है। यदि $t \times 10^9$ वर्षों में स्थायी $^{40}_{20}Ca$ तथा $^{40}_{18}Ar$ नाभिकों का योग तथा रेडियोसक्रिय $^{40}_{19}K$ नाभिक का अनुपात 99 है, तब t का मान होगा [दिया है : ln 10 = 2.3]

(A) 1.15 (B) 9.2 (C) 2.3 (D) 4.6

उत्तर (B)

हल $\therefore \quad \frac{dN}{dt} = -\lambda_1 N - \lambda_2 N$



$$\therefore \quad \frac{dN}{dT} = -(\lambda_1 + \lambda_2)dt$$

$$\Rightarrow \quad N = N_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$N_0 = 0.01\ N_0$ का $N = N_0 - 99\%$ के लिए

हमें प्राप्त होता है

$$t = \frac{\ln 100}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2.3 \times 2}{5 \times 10^{-10}}$$

$$t = 9.2 \times 10^9 \text{ वर्ष}$$

खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 32)

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक	:	**+4**	यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है;
आंशिक अंक	:	**+3**	यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है;
आंशिक अंक	:	**+2**	यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो;
आंशिक अंक	:	**+1**	यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो;
शून्य अंक	:	**0**	यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो);
ऋणात्मक अंक	:	**–1**	सभी अन्य स्थितियों में।

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित **(A), (B)** तथा **(D)** एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

केवल **(A), (B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+4** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** व **(B)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

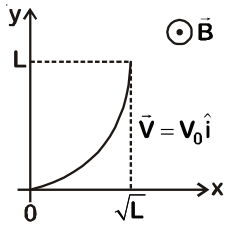
केवल **(B)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

केवल **(D)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) **0** अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर **–1** अंक प्राप्त होगा।

---

1. प्रारम्भ में $y = x^2$ के परवलयाकार आकृति का एक चालक तार चित्र में दर्शाए अनुसार असमरूप चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B} = B_0\left(1+\left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right)\hat{k}$ में वेग $\vec{V} = V_0\hat{i}$ से गतिशील है। यदि V_0, B_0, L तथा β धनात्मक नियतांक हैं तथा $\Delta\phi$ तार के सिरों पर उत्पन्न विभवान्तर है, तब सही कथन है/हैं



(A) $\beta = 0$ के लिए $|\Delta\phi| = \frac{1}{2}B_0V_0L$

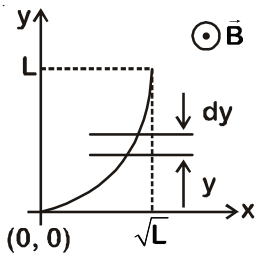
(B) यदि परवलयाकार तार को $\sqrt{2}L$ लम्बाई के सीधे तार, प्रारम्भ में $y = x$ द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है, तब $|\Delta\phi|$ समान रहता है

(C) $|\Delta\phi|$, y-अक्ष पर प्रक्षेपित तार की लम्बाई के समानुपाती होता है

(D) $\beta = 2$ के लिए $|\Delta\phi| = \frac{4}{3}B_0V_0L$

उत्तर (B, C, D)

हल $y = x^2,\ V = V_0\hat{i},\ B = B_0\left(1+\left(\frac{y}{2}\right)^{\beta}\right)\hat{k}$



सिरे बिन्दु (0, 0) तथा $\left(\sqrt{L}, L\right)$ है

माना दूरी 'y' पर y दिशा में अल्प लंबाई dy है

$\therefore\ d\varepsilon = V_0 B\, dy$

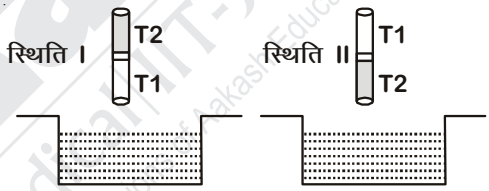
$\therefore\ d\varepsilon = V_0 B_0\left(1+\left(\frac{y}{L}\right)^{\beta}\right)dy = V_0 B_0\left[\int_0^L y + \frac{y^{\beta+1}}{(\beta+1)L^{\beta}}\right]_0^L$

$\varepsilon = V_0 B_0\left[L+\frac{L^{\beta+1}}{(\beta+1)L^{\beta}}\right] \Rightarrow \varepsilon = V_0 B_0 L\left(\frac{\beta+2}{\beta+1}\right)$

यदि $\beta = 2$ तब $\varepsilon = \frac{4}{3}V_0 B_0 L$

2. 0.2 mm त्रिज्या की बेलनाकार केशिका नली भिन्न भिन्न पदार्थों की उन दो केशिकाओं T1 व T2 को जोड़कर निर्मित की गई है जिनका जल सम्पर्क कोण क्रमशः 0° तथा 60° है। केशिका नली को चित्र में दर्शाये अनुसार दो भिन्न भिन्न विन्यासों स्थिति I तथा II में जल में ऊर्ध्वाधर रूप से डुबाया जाता है। निम्न में से कौनसा/कौनसे विकल्प सही है/हैं?

[जल का पृष्ठीय तनाव = 0.075 N/m, जल का घनत्व = 1000 kg/m^3, g = 10 m/s^2 लीजिए]



(A) स्थिति II के लिए, यदि केशिका संधि जल सतह से 5 cm ऊपर है, तब नलिका में उठे हुए जल स्तर की ऊँचाई 3.75 cm होगी। (नवचंद्रक में जल का भार नगण्य मानते हैं)

(B) स्थिति I के लिए, यदि संधि को जल की सतह से 8 cm ऊपर रखते है, तब नलिका में जल स्तर की ऊँचाई 7.5 cm होगी (नवचंद्रक में जल का भार नगण्य मानते हैं)

(C) स्थिति I के लिए, यदि केशिका संधि जल की सतह से 5 cm ऊपर है, तब नलिका में उठे हुए जल स्तर की ऊँचाई 8.75 cm से अधिक होगी (नवचंद्रक में जल का भार नगण्य मानते हैं)

(D) नवचन्द्रक में जल के पात्र के भार के कारण नलिका में उठे हुए जल स्तर की ऊँचाई में संशोधन दोनों स्थितियों के लिए भिन्न भिन्न होगा।

उत्तर (A, B, D)

हल A के लिए : $h = \frac{2T\cos 60^\circ}{\rho g r} = \frac{2\times 0.075\times 1}{10^3\times 10\times 2\times 10^{-4}\times 2}\times 100\ \text{cm} = 3.75\ \text{cm}$

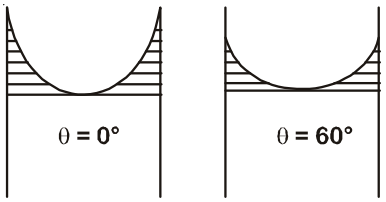
$\Rightarrow$ विकल्प A सही है

B के लिए : $h = \frac{2T\cos 0}{\rho g r} = 7.5\ \text{cm}$

$\Rightarrow$ विकल्प B सही है

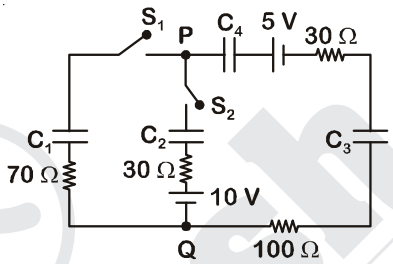
C के लिए: सम्पर्क कोण $h = 5$ cm के लिए व्यवस्थित होगा

D के लिए: नवचन्द्रक की आकृति दोनों स्थितियों में भिन्न-भिन्न होती है



$\Rightarrow$ संशोधन भिन्न भिन्न है।

3. दर्शाए गये परिपथ में प्रारम्भ में संधारित्रों पर कोई आवेश नहीं है तथा कुंजियां S_1 व S_2 खुली हुई हैं। संधारित्रों का मान $C_1 = 10\ \mu F$, $C_2 = 30\ \mu F$ तथा $C_3 = C_4 = 80\ \mu F$ है।



निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं?

(A) यदि कुंजी S_1 को लम्बे समय के लिए इसलिए बंद रखा जाता है ताकि संधारित्र पूर्णतः आवेशित है, तब संधारित्र C_1 के सिरों पर वोल्टता 4 V होगी।

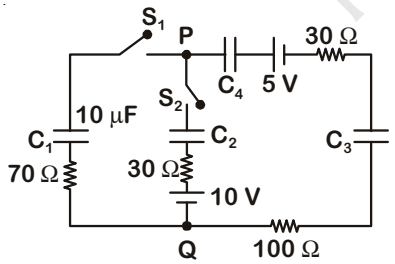
(B) यदि कुंजी S_1 को लम्बे समय के लिए इसलिए बंद रखा जाता है ताकि संधारित्र पूर्णतः आवेशित है। अब कुंजी S_2 को बंद किया जाता है, इस समय पर 30 Ω प्रतिरोधक (बिन्दु P व Q के मध्य) के सिरों पर तात्क्षणिक धारा 0.2 A (दशमलव के एक स्थान तक पूर्णांकन करने पर) होगी।

(C) समय $t = 0$ पर कुंजी S_1 को बंद किया जाता है, तब बंद परिपथ में तात्क्षणिक धारा 25 mA होगी।

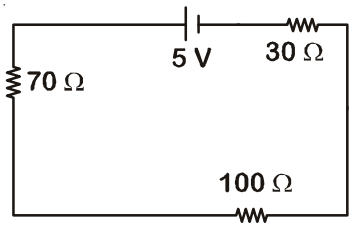
(D) यदि कुंजी S_1 को लम्बे समय के लिए इसलिए बंद रखा जाता है ताकि संधारित्र पूर्णतः आवेशित है, तब बिन्दु P व Q के मध्य वोल्टता में अन्तर 10 V होगा।

उत्तर (A, C)

हल



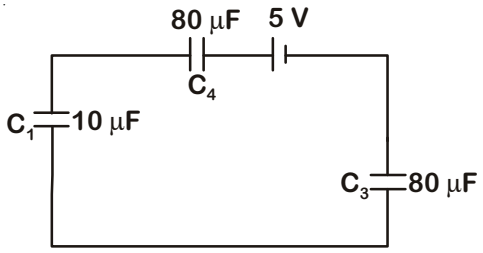
जब स्विच S_1 को बंद किया जाता है, इसलिए $t = 0$ पर तुल्य परिपथ है



$$\therefore \quad I = \frac{5}{200} = 25\ mA$$

स्थायी अवस्था पर S_1 को बन्द करने के लिए

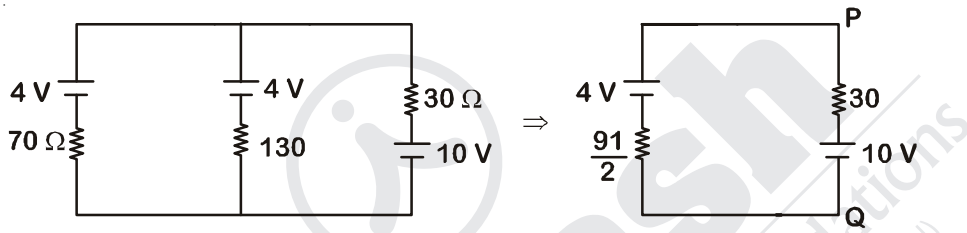
$C_{eq} = 8\ \mu F$ तथा $Q = 40\ \mu C$



$\therefore$ $V(C_1) = 4$ वोल्ट; $V(C_3) = V(C_4) = 0.5$ वोल्ट

स्थायी अवस्था पर 'P' तथा 'Q' के मध्य विभवान्तर 4 वोल्ट है

अब जब स्विच S_2 को बंद किया जाता है (तब तुल्य परिपथ)



$\therefore$ $I_{PQ} = \frac{6\times 2}{151} = 0.08$ एम्पियर

अन्तिम उत्तर (A, C)

4. त्रिज्या R के एक आवेशित कोश पर कुल आवेश Q है। ऊँचाई h तथा त्रिज्या r की एक बंद बेलनाकार सतह से गुजरने वाले विद्युत क्षेत्र का फ्लक्स Φ दिया गया है तथा इसका केन्द्र कोश के केन्द्र के समान है। यहाँ बेलन का केन्द्र बेलन के अक्ष पर वह बिन्दु है जो इसकी सबसे ऊपरी तथा सबसे निचली सतहों से समदूरस्थ है। निम्न में से कौनसा विकल्प सही है/हैं?

[$\in_0$ मुक्त त्रिविम की विद्युतशीलता है]

(A) यदि $h > 2R$ तथा $r = 3R/5$ तब $\Phi = Q/5\in_0$

(B) यदि $h < 8R/5$ तथा $r = 3R/5$ तब $\Phi = 0$

(C) यदि $h > 2R$ तथा $r > R$ तब $\Phi = Q/\in_0$

(D) यदि $h > 2R$ तथा $r = 4R/5$ तब $\Phi = Q/5\in_0$

उत्तर (A, B, C)

हल विकल्प (A) के लिए : $\left(h > 2R\ \ r = \frac{3R}{5}\right)$

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

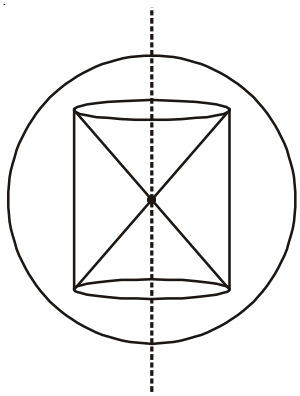
$$Q_{\text{परिबद्ध}} = \frac{Q}{5}$$

$$\therefore \quad \phi = \frac{Q}{5\in_0}$$

विकल्प (B) के लिए : $h < \frac{8R}{5}$, $r = \frac{3R}{5}$

$Q_{\text{परिबद्ध}} = 0$

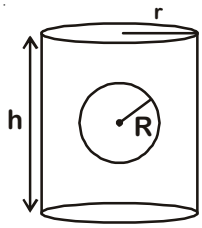
तथा $\phi = 0$



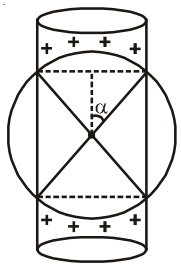
विकल्प (C) के लिए: ($h > 2R$ तथा $r > R$)

$Q_{\text{परिबद्ध}} = Q$

$\therefore \quad \phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$



विकल्प (D) के लिए: $h > 2R$ $r = \frac{4R}{5}$



$Q_{\text{परिबद्ध}} = Q[1 - \cos\alpha]$

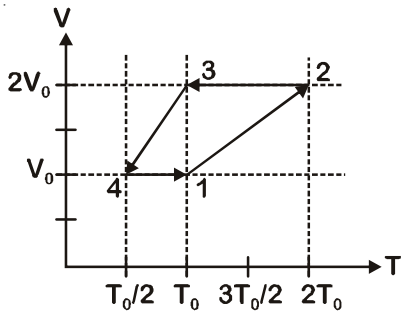
$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{3}{5}$

तथा $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $Q_{\text{परिबद्ध}} = \frac{2Q}{5}$

$\therefore \quad \phi = \frac{2Q}{5\epsilon_0}$

5. एक मोल एकलपरमाणुक आदर्श गैस आयतन तथा ताप (V-T) आरेख में दर्शाए अनुसार एक ऊष्मागतिक चक्र से गुजरती है। सही कथन है/हैं

[R गैस नियतांक है]



(A) उपरोक्त ऊष्मागतिक चक्र केवल समआयतनिक तथा समदाबीय प्रक्रम दर्शाता है

(B) प्रक्रम $1 \to 2$ तथा $3 \to 4$ के दौरान ऊष्मा स्थानान्तरण का अनुपात $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{3\to4}}\right| = \frac{1}{2}$ है

(C) प्रक्रम $1 \to 2$ तथा $2 \to 3$ के दौरान ऊष्मा स्थानान्तरण का अनुपात $\left|\frac{Q_{1\to2}}{Q_{2\to3}}\right| = \frac{5}{3}$ है

(D) ऊष्मागतिक चक्र $(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1)$ में किया गया कार्य $|W| = \frac{1}{2}RT_0$ है

उत्तर (C, D)

हल $|\Delta Q_{(1\to2)}| = nC_P dT = n \times \frac{5}{2} R \times T_0 = \frac{5RT_0}{2}$

$|\Delta Q_{3\to4}| = nC_P dT = n \times \frac{5}{2} R \frac{T_0}{2} = \frac{5RT_0}{4}$

$\frac{|\Delta Q_{1\to2}|}{|\Delta Q_{3\to4}|} = 2$ तथा $|\Delta Q_{2\to3}| = \frac{3}{2}RT_0$

$\frac{(\Delta Q_{1\to2})}{(\Delta Q_{2\to3})} = \frac{5RT_0 \times 2}{2 \times 3RT_0} = \frac{5}{3}$

$w = \sum \Delta Q = \frac{RT_0}{2}$

6. दो समरूप चल कुण्डली गैल्वेनोमीटर का प्रतिरोध 10 Ω है तथा 2 μA धारा पर पूर्ण स्केल विक्षेपण है। इनमें से एक को पूर्ण स्केल पाठ्यांक 100 mV के वोल्टमीटर में तथा दूसरे को पूर्ण स्केल धारा 1 mA के अमीटर में उचित प्रतिरोधकों का उपयोग करके रूपान्तरित किया गया है। इनको तब एक आदर्श सेल का उपयोग करके R = 1000 Ω प्रतिरोधक के साथ ओम नियम के प्रयोग में वोल्टता व धारा के मापन में प्रयुक्त किया जाता है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं?

(A) R का मापित मान 978 Ω < R < 982 Ω होगा

(B) अमीटर का प्रतिरोध 0.02 Ω होगा (2^{nd} दशमलव स्थान का पूर्णांकन)

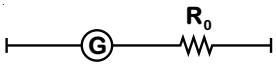
(C) यदि आदर्श सेल को 5 Ω के आन्तरिक प्रतिरोध वाले सेल से प्रतिस्थापित किया जाता है तब R का मापित मान 1000 Ω से अधिक होगा

(D) वोल्टमीटर का प्रतिरोध 100 kΩ होगा

उत्तर (A, B)

हल अधिकतम कुण्डली धारा $I_c = 2 \times 10^{-6}$ A, $R_c = 10\ \Omega$

$\therefore$ कुण्डली में $V_{\text{अधिकतम}} = 2 \times 10^{-6} \times 10 = 2 \times 10^{-5}$ वोल्ट

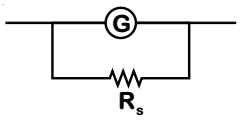


जब 100 mv परास के वोल्टमीटर में रूपान्तरित किया जाता है

$(10 + R_0) \times 2 \times 10^{-6} = 100 \times 10^{-3}$

$\Rightarrow R_0 = 49990\ \Omega$

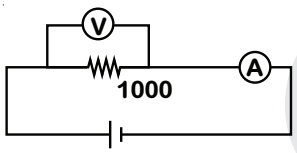
तथा जब 1 mA परास के अमीटर में रूपान्तरित किया जाता है, तब

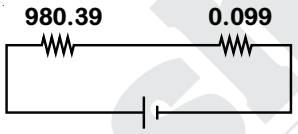


$R_s \times 9.98 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-5}$

$\Rightarrow R_s = 0.02\ \Omega$

अब,





$\therefore R_{eq} = 980.48\ \Omega$ $\therefore I = \dfrac{V_0}{980.48}$ तथा $V' = \dfrac{V_0 \times 50000}{980.48 \times 51}$

$R_{(\text{मापित})} = \dfrac{V'}{I} = \dfrac{50000}{51} = 980.4\ \Omega$

7. एक पतला उत्तल लैंस चित्र में दर्शाये अनुसार अपवर्तनांक n_1 तथा n_2 वाले दो पदार्थों से निर्मित है। बायीं तथा दायीं गोलीय सतहों की वक्रता त्रिज्या समान है। जब $n_1 = n_2 = n$ है, तब लैंस की फोकस दूरी f है। जब $n_1 = n$ तथा $n_2 = n + \Delta n$ है, तब फोकस दूरी $f + \Delta f$ है। माना $\Delta n << (n - 1)$ तथा $1 < n < 2$ है, तब सही कथन है/हैं

(A) $\left|\dfrac{\Delta f}{f}\right| < \left|\dfrac{\Delta n}{n}\right|$

(B) यदि दोनो उत्तल सतहों को समान वक्रता त्रिज्या के अवतल सतहों द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है, तब $\dfrac{\Delta f}{f}$ तथा $\dfrac{\Delta n}{n}$ के मध्य सम्बन्ध अपरिवर्तित रहेगा

(C) यदि $\dfrac{\Delta n}{n} < 0$ तब $\dfrac{\Delta f}{f} > 0$

(D) $n = 1.5$, $\Delta n = 10^{-3}$ तथा $f = 20$ cm के लिए $|\Delta f|$ का मान 0.02 cm होगा (2^{nd} दशमलव स्थान तक पूर्णांकन करने पर)

उत्तर (B, C, D)

हल $\frac{1}{f}=(n_1-1)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right)+(n_2-1)\left(\frac{1}{\infty}-\frac{1}{-R}\right)$

$\frac{1}{f}=\frac{(n_1-1)}{R}+\frac{n_2-1}{R}=\frac{(n_1+n_2-2)}{R}$

अब $\frac{\Delta f}{f^2}=\frac{\Delta n}{R}$

$\frac{\Delta f}{f}=\frac{\Delta n}{(n_1+n_2-2)}=\frac{\Delta n}{[2n+\Delta n-2]}$

$n_1 = n_2 = 1.5$ के लिए $\Delta n = 10^{-3}$, $f = 20$ cm तब $R = 20$ cm

तथा $\Delta f=\frac{10^{-3}\times 20}{(2\times 1.5-2+10^{-3})}\simeq 0.02\,\text{cm}.$

यदि $\frac{\Delta n}{n}<0$ (अपसरित प्रकृति बढ़ती है) $\therefore \frac{\Delta f}{f}>0$

यदि सतहों को समान त्रिज्या की अवतल सतहों द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है, तब फोकस दूरी का समान परिमाण के साथ चिन्ह परिवर्तित होता है।

$\therefore \frac{\Delta f}{f}=\frac{\Delta n}{(2n+\Delta n-2)}$ (अपरिवर्तित रहेगी)

8. मात्रकों की एक पद्धति पर विचार कीजिये जिसमें द्रव्यमान व कोणीय संवेग विमाहीन है। यदि लम्बाई की विमा L है, तब निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं?

(A) बल की विमा L^{-3} है

(B) शक्ति की विमा L^{-5} है

(C) रेखीय संवेग की विमा L^{-1} है

(D) ऊर्जा की विमा L^{-2} है

उत्तर (A, C, D)

हल कोणीय संवेग $\ell = MVR$

$\Rightarrow [\ell] = \frac{ML^2}{T}$ $\because$ M $\rightarrow$ विमाहीन

$\therefore$ $T = L^2$ ℓ भी विमाहीन है

अब $p = mv = \frac{ML}{T}$ $\because$ M विमाहीन है

$\therefore$ $[p] = L^{-1}$

$[\text{ऊर्जा}]=\frac{ML^2}{T^2}=\frac{L^2}{L^2L^2}=L^{-2}$

$[\text{शक्ति}]=\frac{ML^2}{T^2\,T}=\frac{L^2}{L^2L^2L^2}=L^{-4}$

$[\text{बल}]=\frac{ML}{T^2}=\frac{L}{L^2L^2}=L^{-3}$

खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 18)

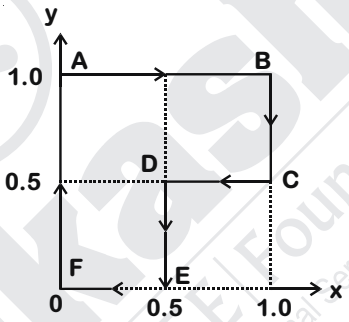
- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

पूर्ण अंक : **+3** यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

शून्य अंक : **0** अन्य सभी स्थितियों में।

---

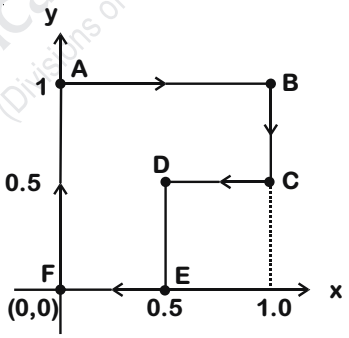
1. एक कण चित्र में दर्शाए अनुसार बल $\vec{F}=(\alpha y\hat{i}+2\alpha x\hat{j})N$ की उपस्थिति में पथ **AB-BC-CD-DE-EF-FA** के अनुदिश गति करता है, जहाँ **x** व **y** मीटर में है तथा $\alpha = -1\ Nm^{-1}$ है। इस बल $\vec{F}$ द्वारा कण पर किया गया कार्य___ जूल होगा।



उत्तर (0.75)

हल $\vec{F}=\alpha y\hat{i}+2\alpha x\hat{j}$

$\alpha=-1 \quad \therefore \quad \vec{F}=-\left[y\hat{i}+2x\hat{j}\right]$



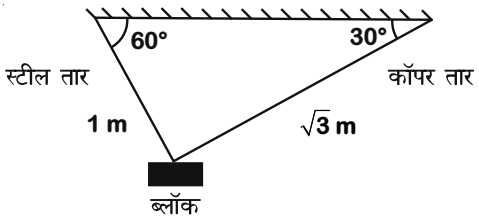
$$\int\vec{F}.\vec{dl}=-(1\times1)+\left(2\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)$$

$= +0.75\ J$

$\Delta W = +\ 0.75\ J$

2. **100 N** भार के एक ब्लॉक को समान अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल **0.5 cm²** वाले कॉपर तथा स्टील के तारों से लटकाया गया है। कॉपर तथा स्टील तार की लंबाई क्रमशः $\sqrt{3}$ **m** तथा **1 m** है। इनके दूसरे सिरे चित्र में दर्शाये अनुसार छत से दृढ़ित किये गये हैं। कॉपर तथा स्टील की तारों द्वारा छत से निर्मित कोण क्रमशः **30°** तथा **60°** है। यदि कॉपर तार में वृद्धि (Δl_c) है तथा स्टील तार में वृद्धि (Δl_s) है, तब अनुपात $\frac{\Delta l_c}{\Delta l_s}$ का मान ____ है

[कॉपर तथा स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः 1×10^{11} N/m^2 तथा 2×10^{11} N/m^2 हैं]



उत्तर (2.00)

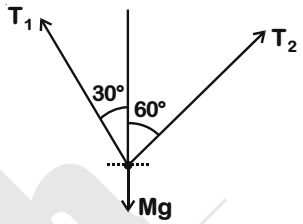
हल

$$\frac{T_1}{2} = \frac{T_2\sqrt{3}}{2}$$

$$T_1 = \sqrt{3}\, T_2$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{T_2 l_2}{A_2 Y_2} \times \frac{A_1 Y_1}{T_1 l_1}$$

$$\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} = \frac{\sqrt{3}\, T_2}{T_1} \times \frac{2}{1} = 2$$



3. 30°C के द्रव को धीरे धीरे 110°C के कैलोरीमीटर में डाला जाता है। द्रव का क्वथनांक 80°C है। यह पाया जाता है कि द्रव का प्रथम 5 gm पूर्णतः वाष्पित हो जाता है। द्रव का अन्य 80 gm डालने के बाद साम्यावस्था ताप 50°C पाया जाता है। द्रव की गुप्त ऊष्मा तथा विशिष्ट ऊष्मा का अनुपात ____°C होगा।

[परिवेश के साथ ऊष्मा के विनिमय को नगण्य मानिये]

उत्तर (270.00)

हल स्थिति-I $\quad 5C \times 50 + 5L = C_2 \times 30 \quad ...(1)$

स्थिति-II $\quad 80\ C\ [50–30] = C_2\ [80–50] \quad ...(2)$

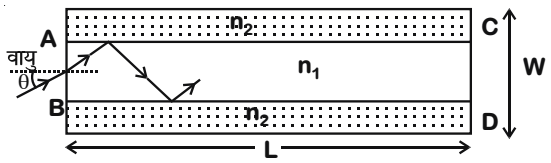
समीकरण (1) व (2) से

$1600\ C = 250\ C + 5L$

$$\therefore \frac{L}{C} = \frac{1350}{5} = 270\,^\circ C$$

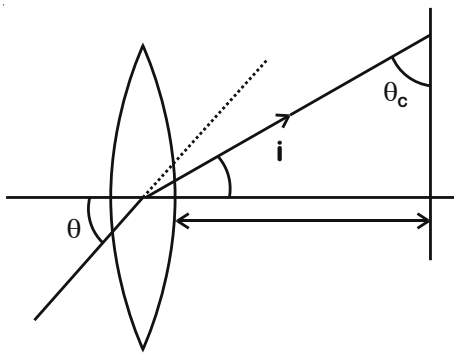
4. L लम्बाई तथा W चौड़ाई की समतल संरचना चित्र में दर्शाये अनुसार अपवर्तनांक $n_1 = 1.5$ तथा $n_2 = 1.44$ के दो भिन्न भिन्न प्रकाशिक माध्यम द्वारा निर्मित है। यदि $L >> W$, एक किरण AB सिरे से प्रवेश करती है तथा CD सिरे से बाहर केवल तभी निकलेगी जब संरचना के अन्दर पूर्ण आंतरिक परावर्तन की स्थिति प्राप्त होती है। $L = 9.6$ m के लिए यदि आपतन कोण θ परिवर्तित होता है, तब एक किरण द्वारा सतह CD से बाहर आने में लिया गया अधिकतम समय $t \times 10^{-9}$ s है, जहाँ t _____ है।

[प्रकाश की चाल $c = 3 \times 10^8$ m/s]



उत्तर (50.00)

हल $t = \frac{L}{V}$



$L = 9.6/\sin\theta_C$

$\sin\theta_C = \frac{1.44}{1.50}$

$L = 10\ m$

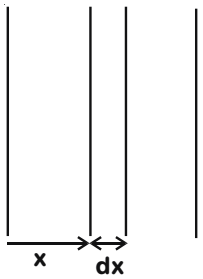
$t_{max} = \frac{10}{2\times10^8} = 5\times10^{-8}s = 50\times10^{-9}s$

5. C धारिता के एक समान्तर प्लेट संधारित्र की प्लेटों के मध्य दूरी d है तथा प्लेटों का क्षेत्रफल A है। प्लेटों के मध्य क्षेत्र को मोटाई $\delta = \frac{d}{N}$ वाली N परावैद्युत परतों से प्लेटों के समान्तर भरा जाता है। m^{th} परत का परावैद्युताक $K_m = K\left(1+\frac{m}{N}\right)$ है। एक अत्यधिक बड़ी N ($> 10^3$) के लिए धारिता C का मान $\alpha\left(\frac{K\in_0 A}{d\ln 2}\right)$ है। α का मान _____ होगा।

[$\in_0$ मुक्त त्रिविम की विद्युतशीलता है।]

उत्तर (1.00)

हल $dC = \frac{K\in_0 A}{dx}$



सभी श्रेणी क्रम में संयोजित हैं

$\frac{1}{C} = \int\frac{1}{dc}$

$\frac{1}{C} = \int\frac{dx}{K\in_0 A(1+m/N)}$

$$x = \frac{md}{N}$$

$$\frac{1}{C} = \int \frac{dx}{K\in_0 A(1+x/d)}$$

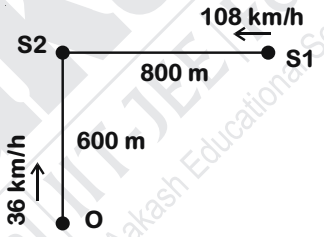
$$\frac{1}{C} = \frac{d}{K\in_0 A}\int_0^x \frac{dx}{d+x}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{d\ln(2)}{K\in_0 A}$$

$$C = \frac{K\in_0 A}{d\ln(2)}$$

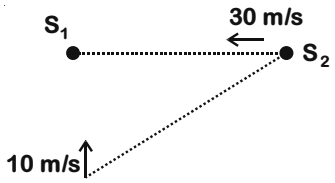
6. 108 km/h के एकसमान वेग से गतिशील एक ट्रेन S1 प्लेटफॉर्म पर स्थित दूसरी ट्रेन S2 के समीप पहुंचती है। एक प्रेक्षक O चित्र में दर्शाये अनुसार S2 की ओर 36 km/h के एकसमान वेग से गति करता है। दोनों ट्रेने समान आवृत्ति 120 Hz की सीटी बजाती है। जब O, S2 से 600 m दूर है तथा S1 व S2 के मध्य दूरी 800 m है, O द्वारा सूनी गई विस्पन्दों की संख्या _____ है।

[ध्वनि की चाल = 330 m/s]



उत्तर (8.13)

हल $V_{ध्वनि} = 330$ m/s



$$f_1 = 120\left[\frac{330+10\sin 53^\circ}{330-30\cos 37^\circ}\right]\text{Hz}$$

$$f_2 = 120\left[\frac{330+10}{330}\right]\text{Hz}$$

$$\Delta f = 120\times\left[\frac{336}{306}-\frac{34}{33}\right]$$

= 8.13 Hz

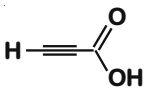
PART-II : CHEMISTRY

खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में चार **(04)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर के संगत विकल्प का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दिए गए अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा।

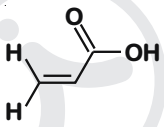
पूर्ण अंक	:	+3	यदि केवल सही उत्तर चुना गया है;
शून्य अंक	:	0	यदि कोई भी विकल्प ना चुना गया हैं (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित हैं);
ऋणात्मक अंक	:	–1	अन्य सभी स्थितियों में।

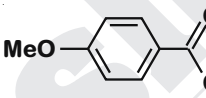
1. नीचे दिये गये कार्बोक्सिलिक अम्लों की अम्लीय सामर्थ्य का सही क्रम है

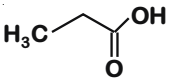


(A) II > I > IV > III (B) I > II > III > IV (C) III > II > I > IV (D) I > III > II > IV

उत्तर (B)





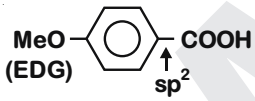


हल I. $HC \equiv \underset{sp}{C} - COOH$

II. $H_2C = \underset{sp^2}{CH} - COOH$

III.

IV. $H_3C - \underset{sp^3}{CH_2} - COOH$



+I प्रभाव कार्बोक्सिलिक अम्ल के अम्लीय लक्षण कम कर देता है तथा **–I** प्रभाव अम्लीय लक्षण बढ़ाते हैं चुंकि कार्बोक्सिलिक अम्ल से जुड़े **'C'** की विद्युतऋणता का क्रम $sp > sp^2 > sp^3$ है अत: क्रम **I > II > III > IV** है

II अम्ल **III** की अपेक्षा अधिक अम्लीय है क्योंकि बेन्जीन वलय पर इलेक्ट्रॉन दाता जुड़ा है।

2. क्रोमियम **(III)** लवण के सुहागा मनका परीक्षण में प्राप्त हरे रंग का कारण है

(A) CrB (B) $Cr_2(B_4O_7)_3$ (C) $Cr(BO_2)_3$ (D) Cr_2O_3

उत्तर (C)

हल सुहागा मनका परीक्षण में धातु ऑक्साइड कांच जैसे मनके साथ क्रिया करके मेटा बोरेट बनाता है।

$$\underset{\text{बोरेक्स}}{Na_2B_4O_7 \cdot 10H_2O} \xrightarrow{\Delta} Na_2B_4O_7 \xrightarrow{\Delta} \underbrace{NaBO_2 + B_2O_3}_{\text{कांच जैसा मनका}}$$

$$NaBO_2 + Cr_2O_3 \longrightarrow \underset{\text{हरा}}{Cr(BO_2)_3}$$

3. केलामीन, मेलाकाइट मैग्नेटाइट तथा क्रायोलाइट क्रमश: हैं

(A) $ZnSO_4$, $CuCO_3$, Fe_2O_3, AlF_3
(B) $ZnSO_4$, $Cu(OH)_2$, Fe_3O_4, Na_3AlF_6
(C) $ZnCO_3$, $CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$, Fe_3O_4, Na_3AlF_6
(D) $ZnCO_3$, $CuCO_3$, Fe_2O_3, Na_3AlF_6

उत्तर (C)

Aakash Medical|IIT-JEE|Foundations (Divisions of Aakash Educational Services Limited)

हल $CuCO_3 \cdot Cu(OH)_2$ → मेलाकाइट

Fe_3O_4 → मैग्नेटाइट

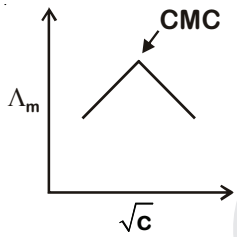
$ZnCO_3$ → केलामीन

Na_3AlF_6 → क्रायोलाइट

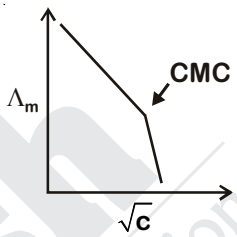
4. एक प्रबल विद्युत अपघट्य के रूप में व्यवहार करने वाले सोडियम स्टीयरेट के जलीय विलयन की मोलर चालकता (Λ_m) का मापन सोडियम स्टीयरेट की परिवर्ती सांद्रता (c) पर किया गया। निम्न में से कौन ग्राफ विलयन में मिसैल निर्माण को सही रूप से प्रदर्शित करता है?

(चित्र में क्रान्तिक मिसैल सांद्रता (CMC) को तीर द्वारा दर्शाया गया है)

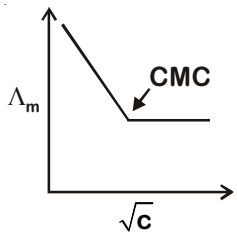
(A)



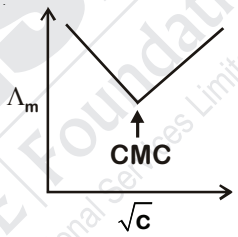
(B)



(C)



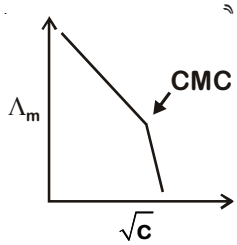
(D)



उत्तर (B)

हल सोडियम स्टीयरेट → $CH_3(CH_2)_{16}COO^-Na^+$

सामान्य या निम्न सांद्रता पर, यह प्रबल विद्युतअपघट्य के रूप में व्यवहार करता है तथा प्रबल विद्युतअपघट्य के लिए सांद्रता वृद्धि पर मोलर चालकत्व (Λ_m) घटता है लेकिन केवल एक विशेष सांद्रता के उपर सोडियम स्टीयरेट समूहन बनाता है, यह सांद्रता **CMC** कहलाती है। चूकि आयनों की संख्या घटती है, अतः Λ_m घटता है



खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 32)

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : **+4** यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है;

आंशिक अंक : **+3** यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है;

आंशिक अंक	:	+2	यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो;
आंशिक अंक	:	+1	यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो;
शून्य अंक	:	0	यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो);
ऋणात्मक अंक	:	–1	सभी अन्य स्थितियों में।

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित (A), (B) तथा (D) एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

  केवल (A), (B) व (D) का चयन किये जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;

  केवल (A) व (B) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

  केवल (A) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

  केवल (B) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

  केवल (A) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

  केवल (B) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

  केवल (D) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

  किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) 0 अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर –1 अंक प्राप्त होगा।

---

1. निम्न में से कौनसे कथन सही है/हैं?

   (A) सूक्रोज के जलअपघटन पर दक्षिण ध्रुवण घूर्णक ग्लूकोज तथा वाम ध्रुवण घूर्णक फ्रक्टोज प्राप्त होता है

   (B) ब्रोमीन जल द्वारा ग्लूकोज के ऑक्सीकरण पर ग्लूटेमिक अम्ल बनता है

   (C) D-(+)-ग्लूकोज के दो छः सदस्यीय चक्रीय हेमिएसीटेल रूप एनोमर कहलाते हैं

   (D) मोनोसैकेराइड जल अपघटित होकर पॉलिहाइड्रॉक्सी एल्डिहाइड तथा कीटोन नही दे सकते

उत्तर (A, C, D)

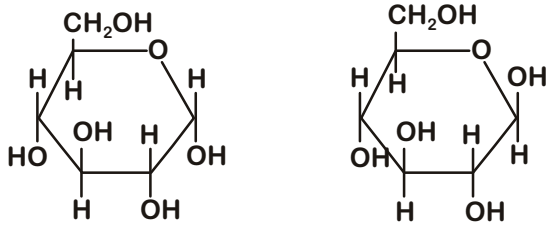
हल सूक्रोज का जलअपघटन

(A) $\underset{(\text{सूक्रोज})}{C_{12}H_{22}O_{11}} + H_2O \longrightarrow \underset{\substack{D(+)\text{ ग्लूकोज} \\ \text{दक्षिण ध्रुवण घूर्णक}}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\substack{D(-)\text{ फ्रक्टोज} \\ \text{वाम ध्रुवण घूर्णक}}}{C_6H_{12}O_6}$

(B)

ग्लूकोज ग्लूकोनिक अम्ल

(C)



α-D(+) ग्लूकोपायरैनोज β-D(+) ग्लूकोपायरैनोज

एनामर

2. साम्य पर एक गैस में एक अणु की वर्ग माध्य मूल चाल (U_{rms}) तथा औसत स्थानान्तरणीय गतिज ऊर्जा (ε_{av}) के संदर्भ में निम्न में से कौनसे कथन सही है/हैं?

(A) इसका ताप चार गुना बढ़ाने पर U_{rms} दुगुना हो जाता है

(B) इसका ताप चार गुना बढ़ाने पर ε_{av} दुगुना हो जाता है

(C) एक दिये गये ताप पर ε_{av} इसके आणविक द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती

(D) U_{rms} इसके आणविक द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है

उत्तर (A, C, D)

हल $\bar{E}_K = \frac{3}{2}KT$ औसत गतिज ऊर्जा केवल परम ताप पर निर्भर करती है

K = बोल्ट्जमान नियतांक

$$U_{rms} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad U_{rms} \propto \sqrt{T}$$

$$U_{rms} \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$$

उपरोक्त सूत्र के उपयोग से, सही कथन (A, C, D) है

3. टिन क्लोराइड Q निम्न अभिक्रियाएं देता है। (संतुलित नहीं है)

$Q + Cl^- \rightarrow X$

$Q + Me_3N \rightarrow Y$

$Q + CuCl_2 \rightarrow Z + CuCl$

X एक एककऋणावेशित आयन है जिसकी ज्यामिति पिरैमिडीय हैं। Y तथा Z दोनों उदासीन यौगिक है। सही विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिए।

(A) Z में केन्द्रीय परमाणु की ऑक्सीकरण अवस्था +2 है

(B) X में केन्द्रीय परमाणु sp^3 संकरित है

(C) Z में केन्द्रीय परमाणु पर एक एकांकी इलेक्ट्रॉन युग्म है

(D) Y में उपसहसंयोजक बंध है

उत्तर (B, D)

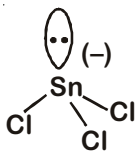
हल यौगिक Q, $SnCl_2$ है। दी गयी अभिक्रियाएं निम्न है:

$$SnCl_2 + Cl^- \longrightarrow \underset{(X)}{SnCl_3^-}$$

$$SnCl_2 + Me_3N \longrightarrow \underset{(Y)}{Me_3\overset{+}{N}-\overset{-}{Sn}Cl_2}$$

$$SnCl_2 + 2CuCl_2 \longrightarrow \underset{(Z)}{SnCl_4} + 2CuCl$$

$SnCl_3^-$ में Sn का संकरण sp^3 है।



ट्राईमेथिलएमीन $SnCl_2$ में Sn के साथ उपसहसंयोजक बंध बनाता है।

$SnCl_4$(Z) के केन्द्रीय परमाणु पर कोई एकांकी युग्म नहीं है।

4. O_2 की उपस्थिति में KOH के साथ MnO_2 के संगलन पर लवण W बनता है। W के क्षारीय विलयन के विद्युतअपघटनी ऑक्सीकरण पर अन्य लवण X बनता है। W तथा X में उपस्थित मैंगनीज युक्त आयन क्रमश: Y तथा Z हैं। सही कथन है/हैं

(A) Y तथा Z दोनों रंगीन हैं तथा इनकी आकृति चतुष्फलकीय है

(B) जलीय अम्लीय विलयन में Y असमानुपातन अभिक्रिया पर Z तथा MnO_2 देता हैं

(C) Y प्रतिचुम्बकीय प्रकृति का है जबकि Z अनुचुम्बकीय प्रकृति का है

(D) Y तथा Z दोनों में ऑक्सीजन के *p*-कक्षक तथा मैंगनीज के *d*-कक्षक के मध्य π-बंधन होता है

उत्तर (A, B, D)

हल $$2MnO_2 + 4KOH + O_2 \xrightarrow{\text{संगलन}} \underset{(W)}{2K_2MnO_4} + 2H_2O$$

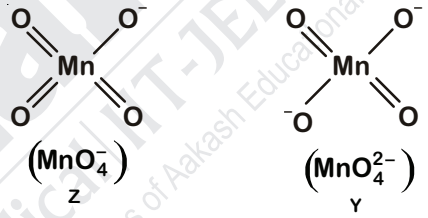
जलीय K_2MnO_4 के विद्युतअपघटन में MnO_4^{2-} का MnO_4^- में ऑक्सीकरण हो जाता है।

$$\underset{(W)}{2K_2MnO_4} + 2H_2O \xrightarrow{\text{विद्युत अपघटन}} \underset{(X)}{2KMnO_4} + 2KOH + H_2$$

अम्लीय माध्यम में K_2MnO_4 का असमानुपातन हो जाता है।

$$\underset{(Y)}{3MnO_4^{2-}} + 4H^+ \longrightarrow \underset{(Z)}{2MnO_4^-} + MnO_2 + 2H_2O$$

K_2MnO_4 हरे रंग का तथा $KMnO_4$ बैंगनी रंग का होता है। दोनों की आकृति चतुष्फलकीय है जिसमें $p\pi - d\pi$ बंध पाया जाता है।



(MnO_4^-) Z　　(MnO_4^{2-}) Y

5. नीचे दिये गये विकल्पों में से उन अभिक्रियाओं का चयन कीजिए जिनके लिए मानक अभिक्रिया एन्थैल्पी मानक संभवन एन्थैल्पी के बराबर है।

(A) $\frac{1}{8}S_8(s) + O_2(g) \rightarrow SO_2(g)$

(B) $2H_2(g) + O_2(g) \rightarrow 2H_2O(l)$

(C) $2C(g) + 3H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$

(D) $\frac{3}{2}O_2(g) \rightarrow O_3(g)$

उत्तर (A, D)

हल क्योंकि एक यौगिक का मानक संभवन एन्थैल्पी; मानक एन्थैल्पी में वह परिवर्तन है जब मानक अवस्था में अवयवी तत्वों की आवश्यक मात्रा से प्रारम्भ करके एक मोल यौगिक बनता है।

अत: केवल (A) तथा (D) विकल्प सही हैं।

6. नीचे दिये गये क्षय अनुक्रम में

$$^{238}_{92}U \xrightarrow{-x_1} {}^{234}_{90}Th \xrightarrow{-x_2} {}^{234}_{91}Pa \xrightarrow{-x_3} {}^{234}Z \xrightarrow{-x_4} {}^{230}_{90}Th$$

x_1, x_2, x_3 तथा x_4 संगत समस्थानिकों द्वारा उत्सर्जित कण/विकिरण है। सही विकल्प है/हैं

(A) x_3, γ-किरण है

(B) Z एक यूरेनियम का समस्थानिक है

(C) x_1 ऋणावेशित प्लेट की और विक्षेपित होगा

(D) x_2, β^- है

उत्तर (B, C, D)

हल $_{92}U^{238} \longrightarrow {}_{90}Th^{234} + {}_{2}He^{4}$

$_{90}Th^{234} \longrightarrow {}_{91}Pa^{234} + {}_{-1}e^{0}$

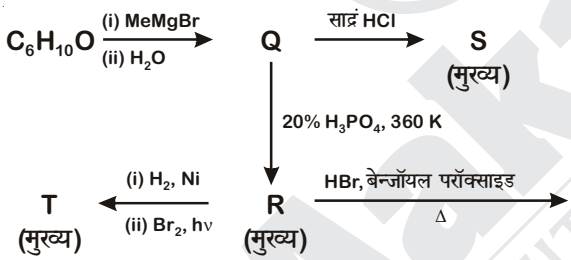
$_{91}Pa^{234} \longrightarrow {}_{92}Z^{234} + {}_{-1}e^{0}$

$_{92}Z^{234} \longrightarrow {}_{90}Th^{230} + {}_{2}He^{4}$

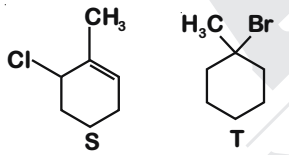
$\therefore \quad x_1 = \alpha \; ; \; x_2 = x_3 = {}_{-1}\beta^0 \; ; \; x_4 = \alpha$

Z का परमाणु क्रमांक 92 है।

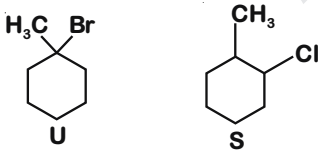
7. नीचे दिये गये अभिक्रियाओं के समुच्चय के लिए सही विकल्प का चयन कीजिए।



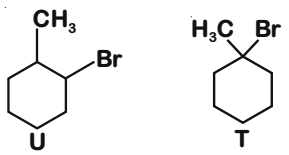
(A)



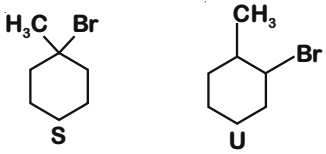
(B)



(C)

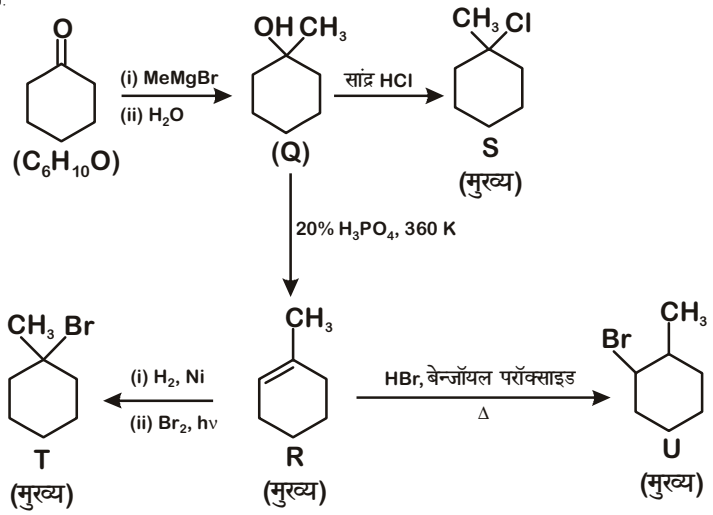


(D)



उत्तर (C, D)

हल



8. नीचे दिये गये प्रत्येक विकल्प में चार अणुओं के समुच्चय दिये गये हैं। उन विकल्प/विकल्पों को पहचानिये जिनमें सभी चारों अणुओं में कक्ष ताप पर स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण है।

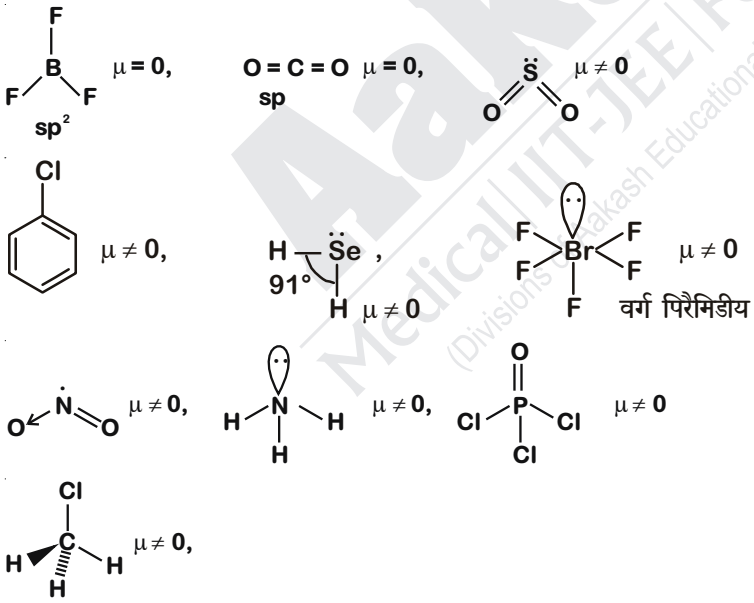
(A) BF_3, O_3, SF_6, XeF_6 (B) SO_2, C_6H_5Cl, H_2Se, BrF_5

(C) NO_2, NH_3, $POCl_3$, CH_3Cl (D) $BeCl_2$, CO_2, BCl_3, $CHCl_3$

उत्तर (B, C)

हल समसितीय अणु के लिए $\mu = 0$

असमसितीय अणु के लिए $\mu \neq 0$



खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 18)

- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

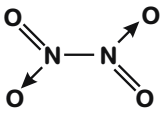
पूर्ण अंक : **+3** यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

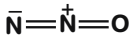
शून्य अंक : **0** अन्य सभी स्थितियों में।

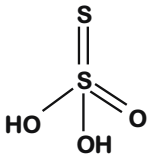
1. B_2H_6, $B_3N_3H_6$, N_2O, N_2O_4, $H_2S_2O_3$ तथा $H_2S_2O_8$ में से एक ही प्रकार के दो परमाणुओं के मध्य सहसंयोजक बंध युक्त अणुओं की कुल संख्या है

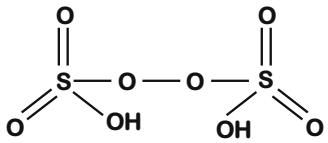
उत्तर (4.00)

हल

N_2O_4 : 

N_2O : 

$H_2S_2O_3$: 

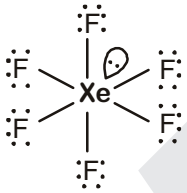
$H_2S_2O_8$: 

∴ समान प्रकार के परमाणुओं के मध्य बंध वाले यौगिको की संख्या = 4

2. 143 K पर, XeF_4 की O_2F_2 के साथ अभिक्रिया पर जीनॉन यौगिक Y बनता है। Y के सम्पूर्ण अणु पर उपस्थित एकांकी इलेक्ट्रॉन युग्म की कुल संख्या है

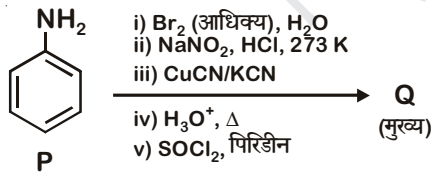
उत्तर (19.00)

हल $XeF_4 + O_2F_2 \xrightarrow{143\ K} \underset{(Y)}{XeF_6} + O_2$

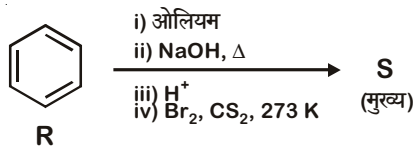
XeF_6 (Y)  एकांकी युग्मों की कुल संख्या = 19

3. योजना 1 तथा 2 क्रमशः P का Q में तथा R का S में रूपान्तरण को वर्णित करता है। योजना 3, Q तथा S से T के संश्लेषण को वर्णित करता है। T के अणु में Br परमाणुओं की कुल संख्या है

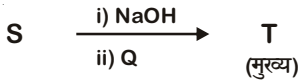
योजना 1:



योजना 2:

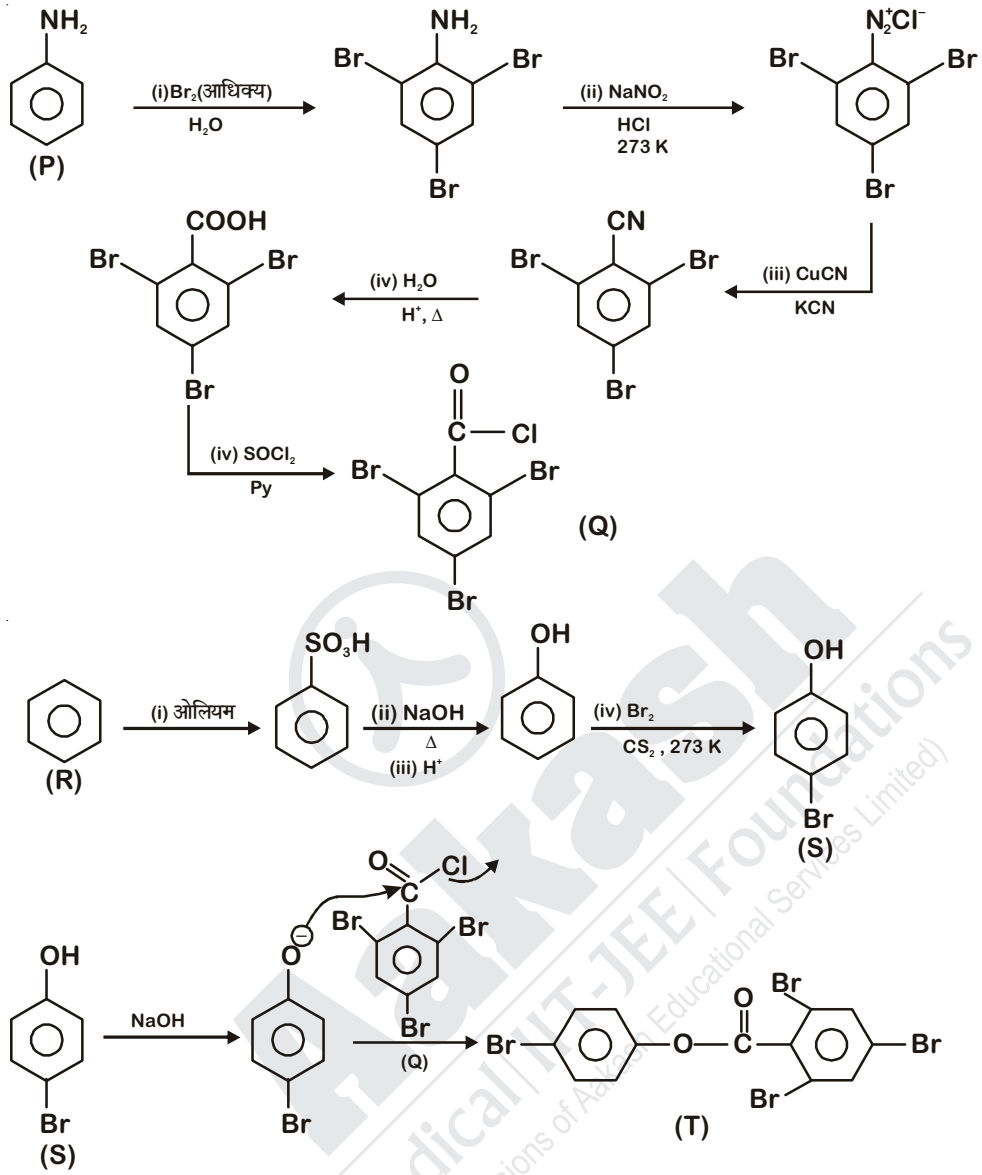


योजना 3:



उत्तर (4.00)

हल



4. 39 g बेन्जीन में 0.5 g अवाष्पशील, अन-आयनिक विलेय घोलने पर इसका वाष्प दाब 650 mm Hg से 640 mm Hg तक कम हो जाता है। विलेय मिलाने पर बेन्जीन का हिमांक अवनमन (K में) है

(दिये गये आंकड़े: बेन्जीन का मोलर द्रव्यमान तथा हिमांक अवनमन स्थिरांक क्रमश: 78 g mol^{-1} तथा 5.12 K kg mol^{-1} है)

उत्तर (1.02)

हल $\because \quad \frac{P^\circ - P}{P^\circ} = x_{\text{विलेय}} = \frac{n_{\text{विलेय}}}{n_{\text{विलेय}} + n_{\text{विलायक}}}$

$\Rightarrow \quad \frac{10}{650} = \frac{n_{\text{विलेय}}}{n_{\text{विलेय}} + 0.5} \quad \Rightarrow n_{\text{विलेय}} + 0.5 = 65\, n_{\text{विलेय}}$

$\Rightarrow \quad n_{\text{विलेय}} = \frac{0.5}{64} = \frac{1}{2 \times 64}$

$\Delta T_f = K_f \cdot m$

$= 5.12 \times 1000 \times \frac{1}{2 \times 64 \times 39}$

$= 1.02 \text{ K}$

5. अभिक्रिया $A + B + C \rightarrow$ उत्पाद के लिये, नीचे दी गयी सारणी में दिये गये बलगतिक आकड़ों पर विचार कीजिए

प्रयोग संख्या	[A] (mol dm^{-3})	[B] (mol dm^{-3})	[C] (mol dm^{-3})	अभिक्रिया की दर (mol dm^{-3} s^{-1})
1	0.2	0.1	0.1	6.0×10^{-5}
2	0.2	0.2	0.1	6.0×10^{-5}
3	0.2	0.1	0.2	1.2×10^{-4}
4	0.3	0.1	0.1	9.0×10^{-5}

$[A] = 0.15$ mol dm^{-3}, $[B] = 0.25$ mol dm^{-3} तथा $[C] = 0.15$ mol dm^{-3} के लिए अभिक्रिया दर $Y \times 10^{-5}$ mol dm^{-3} s^{-1} पायी गयी, तब Y का मान है

उत्तर (6.75)

हल $A + B + C \longrightarrow$ उत्पाद

दर $\propto [A]^x [B]^y [C]^z$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{(0.2)^x(0.1)^y(0.1)^z}{(0.2)^x(0.2)^y(0.1)^z} = \frac{6\times10^{-5}}{6\times10^{-5}}$$

$\therefore \quad y = 0$

इसी प्रकार x तथा z की गणना की जाती है, $x = 1, z = 1$

दर नियतांक $K = \frac{6\times10^{-5}}{0.2\times0.1} = 3\times10^{-3}$

$\therefore$ दी गयी सांद्रता पर दर $= 3 \times 10^{-3} \times (0.15)^1(0.25)^0(0.15)^1$

$= 6.75 \times 10^{-5}$ mol dm^{-3} S^{-1}

$Y = 6.75$

6. नीचे दी गयी अभिक्रिया के लिए 298 K पर साम्य नियतांक $K_c = 1.6 \times 10^{17}$ है।

$$Fe^{2+}(aq) + S^{2-}(aq) \rightleftharpoons FeS(s)$$

जब 0.06 M $Fe^{2+}(aq)$ तथा 0.2 M $S^{2-}(aq)$ विलयनो के तुल्य आयतन को मिलाया जाता है, तो $Fe^{2+}(aq)$ का साम्य नियतांक सांद्रता $Y \times 10^{-17}$ M है। तब Y का मान है

उत्तर (8.93)

हल

	$Fe^{2+}(aq) + S^{2-}(aq) \rightleftharpoons FeS(s)$,		$K = 1.6 \times 10^{17}$
t_0	0.03	0.1	–
t_{eq}	x	$0.1 - 0.03 \simeq 0.07$	–

$\therefore \quad x(0.07) = \frac{1}{1.6} \times 10^{-17}$

$\Rightarrow x \simeq 8.93 \times 10^{-17}$ M

$\therefore \quad Y = 8.93$

PART-III : MATHEMATICS

खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में चार **(04)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर के संगत विकल्प का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दिए गए अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा।

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही उत्तर चुना गया है;

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी विकल्प ना चुना गया हैं (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित हैं);

ऋणात्मक अंक : –1 अन्य सभी स्थितियों में।

1. माना S, $|z-2+i| \geq \sqrt{5}$ को संतुष्ट करने वाली सभी सम्मिश्र संख्याओं z का समुच्चय है। यदि सम्मिश्र संख्या z_0 इस प्रकार है कि $\frac{1}{|z_0-1|}$, समुच्चय $\left\{\frac{1}{|z-1|} : z \in S\right\}$ का अधिकतम है, तब $\frac{4-z_0-\bar{z}_0}{z_0-\bar{z}_0+2i}$ का मुख्य कोणांक है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

उत्तर (C)

हल $|z-2+i| \geq \sqrt{5}$

$\frac{1}{|z_0-1|}$ अधिकतम है

जब $|z_0 - 1|$ न्यूनतम है

माना $z_0 = x + iy$

$x < 1$ और $y > 0$

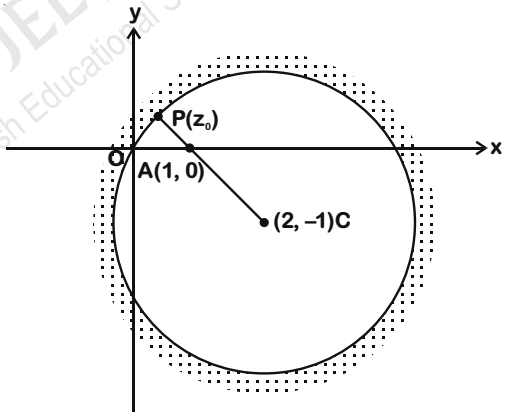
$$\frac{4-z_0-\bar{z}_0}{z_0-\bar{z}_0+2i}$$

$$= \frac{4-x-iy-x+iy}{x+iy-x+iy+2i}$$

$$= \frac{4-2x}{(y+1)2i} = \frac{-i(2-x)}{(y+1)}$$

$\because$ $\frac{2-x}{y+1}$ धनात्मक वास्तविक संख्या है

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{4-z_0-\bar{z}_0}{z_0-\bar{z}_0+2i}\right) = -\frac{\pi}{2}$$



2. माना

$$M = \begin{bmatrix} \sin^4\theta & -1-\sin^2\theta \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \alpha I + \beta M^{-1},$$

जहाँ $\alpha = \alpha(\theta)$ व $\beta = \beta(\theta)$ वास्तविक संख्याऐं हैं और I, क्रम 2×2 की इकाई मैट्रिक्स है। यदि

α^*, समुच्चय $\{\alpha(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ का न्यूनतम है और

β^*, समुच्चय $\{\beta(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$ का न्यूनतम है,

तब $\alpha^* + \beta^*$ का मान है

(A) $-\frac{17}{16}$ (B) $-\frac{29}{16}$ (C) $-\frac{31}{16}$ (D) $-\frac{37}{16}$

उत्तर (B)

हल $$M = \begin{bmatrix} \sin^4\theta & -1-\sin^2\theta \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \alpha I + \beta M^{-1}$$

$\therefore$ $\det(M) = |M| = \sin^4\theta \cdot \cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta + 2$

$$= \left\{\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \sin^4\theta & -1-\sin^2\theta \\ 1+\cos^2\theta & \cos^4\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \frac{\beta}{|M|}\begin{bmatrix} \cos^4\theta & 1+\sin^2\theta \\ -1-\cos^2\theta & \sin^4\theta \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $\alpha = \cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - \frac{1}{2}(\sin^2 2\theta)$

और $\beta = -|M|$

$$= -\left\{\left(\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\}$$

$\therefore$ $\alpha_{min} = \frac{1}{2}$ और $\beta_{min} = -\frac{37}{16}$

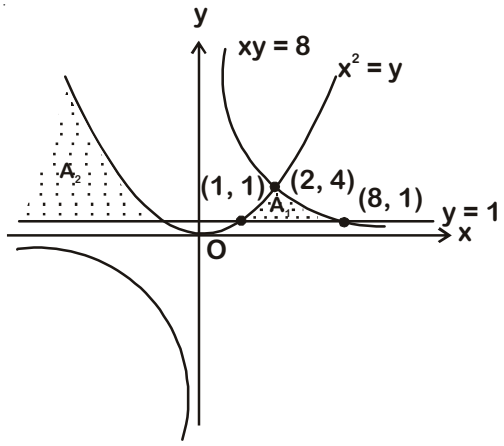
$\therefore$ $\alpha^* + \beta^* = \frac{1}{2} - \frac{37}{16} = -\frac{29}{16}$

3. क्षेत्र $\{(x, y) : xy \le 8, 1 \le y \le x^2\}$ का क्षेत्रफल है

(A) $8\log_e 2 - \frac{7}{3}$ (B) $16\log_e 2 - 6$ (C) $8\log_e 2 - \frac{14}{3}$ (D) $16\log_e 2 - \frac{14}{3}$

उत्तर (D)

हल



क्षेत्र का क्षेत्रफल $A_1 = \int_1^2 \left(x^2 - 1\right) dx + \int_2^8 \left(\frac{8}{x} - 1\right) dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 + \left[8 \ln |x| - x\right]_2^8$

$= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 + 8 \ln 8 - 8 - 8 \ln 2 + 2$

$= \frac{-14}{3} + 16 \ln 2$

नोट:- चूँकि अभीष्ट क्षेत्रफल में, क्षेत्र A_2 का क्षेत्रफल भी स्थित है, जो कि अपरिबद्ध है। यद्यपि क्षेत्र A_1 का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा चुका है।

4. एक रेखा $y = mx + 1$, वृत्त $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ को बिंदु P व Q पर प्रतिच्छेद करती है। यदि रेखाखण्ड PQ के मध्य बिंदु का x-निर्देशांक $-\frac{3}{5}$ है, तब निम्न में से कौनसा विकल्प सही है?

(A) $2 \le m < 4$ (B) $4 \le m < 6$ (C) $6 \le m < 8$ (D) $-3 \le m < -1$

उत्तर (A)

हल जीवा PQ का मध्य बिंदु $A\left(-\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}m + 1\right)$ के रूप में मान सकते हैं

$\because$ $AO \perp PQ$

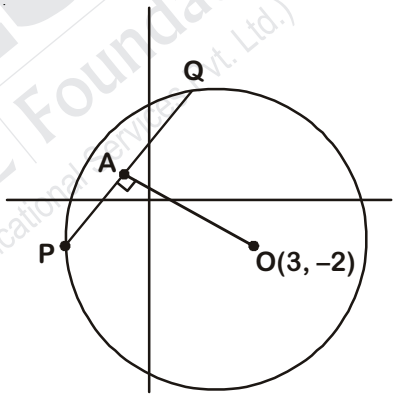
AO की प्रवणता × PQ की प्रवणता = –1

$\Rightarrow \left(\frac{1 - \frac{3}{5}m + 2}{-\frac{3}{5} - 3}\right) \cdot m = -1$

$\Rightarrow \left(3 - \frac{3}{5}m\right) m = \frac{18}{5}$

$\Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$

$\Rightarrow m = 2$ अथवा 3



खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 32)

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है;

आंशिक अंक : +3 यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है;

आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो;

आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो;

शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो);

ऋणात्मक अंक : –1 सभी अन्य स्थितियों में।

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित (A), (B) तथा (D) एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

केवल (A), (B) व (D) का चयन किये जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) व (B) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (B) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

केवल (B) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

केवल (D) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) 0 अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर –1 अंक प्राप्त होगा।

---

1. तीन बैग B_1, B_2 व B_3 है। बैग B_1 में 5 लाल व 5 हरी गेंदे हैं, बैग B_2 में 3 लाल व 5 हरी गेंदे है, और बैग B_3 में 5 लाल व 3 हरी गेंदे हैं। बैग B_1, B_2 व B_3 के चयन की प्रायिकताऐं क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{3}{10}$ व $\frac{4}{10}$ है। एक बैग का यादृच्छया चयन किया जाता है और बैग में से यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है। तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) चयनित बैग B_3 व चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता $\frac{3}{10}$ है।

(B) चयनित बैग B_3 व चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता $\frac{5}{13}$ है

(C) चयनित गेंद का रंग हरा और चयनित बैग B_3 होने की प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है

(D) चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता $\frac{39}{80}$ है

उत्तर (C, D)

हल $\boxed{\begin{matrix}5R\\5G\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}3R\\5G\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}5R\\3G\end{matrix}}$

B_1 B_2 B_3

$P(B_1) = \frac{3}{10}$ $P(B_2) = \frac{3}{10}$ $P(B_3) = \frac{4}{10}$

(A) चयनित बैग B_3 व चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता

$$= P(B_3) \times P\left(\frac{G}{B_3}\right)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$

(B) चयनित बैग B_3 व दी गयी चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता $P\left(\frac{B_3}{G}\right)$

$$P\left(\frac{B_3}{G}\right)=\frac{P\left(\frac{G}{B_3}\right)P(B_3)}{P\left(\frac{G}{B_1}\right)P(B_1)+P\left(\frac{G}{B_2}\right)P(B_2)+P\left(\frac{G}{B_3}\right)P(B_3)}$$

$$=\frac{\frac{4}{10}\times\frac{3}{8}}{\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{8}}=\frac{4}{13}$$

(C) चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता दिया गया है कि चयनित बैग B_3 है।

$$P\left(\frac{G}{B_3}\right)=\frac{3}{8}$$

(D) चयनित गेंद का रंग हरा होने की प्रायिकता

$$P(G)=P(B_1)P\left(\frac{G}{B_1}\right)+P(B_2)P\left(\frac{G}{B_2}\right)+P(B_3)P\left(\frac{G}{B_3}\right)$$

$$=\frac{3}{10}\times\frac{5}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{8}$$

$$=\frac{39}{80}$$

2. माना $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ निम्न द्वारा दिया गया फलन है।

$$f(x)=\begin{cases}x^5+5x^4+10x^3+10x^2+3x+1, & x<0;\\ x^2-x+1, & 0\le x<1;\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+7x-\frac{8}{3}, & 1\le x<3;\\ (x-2)\log_e(x-2)-x+\frac{10}{3}, & x\ge 3.\end{cases}$$

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) f' का $x=1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है

(B) f', $x=1$ पर अवकलनीय नहीं है

(C) f आच्छादक है

(D) f, $(-\infty, 0)$ पर वर्धमान है

उत्तर (A, B, C)

हल

$$f(x)=\begin{cases}x^5+5x^4+10x^3+10x^2+3x+1, & x<0\\ x^2-x+1, & 0\le x<1\\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+7x-\frac{8}{3}, & 1\le x<3\\ (x-2)\log_e(x-2)-x+\frac{10}{3}, & x\ge 3\end{cases}$$

स्पष्टतः $f(x)$, $x=0$, 1 व 3 पर सतत् है।

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}5x^4+20x^3+30x^2+20x+3, & x<0\\ 2x-1, & 0<x<1\\ 2x^2-8x+7, & 1<x<3\\ \log_e(x-2), & x>3.\end{cases}$$

$x = 1$ पर, $f''(1^-) > 0$ और $f''(1^+) < 0$

$\therefore$ $f'(x)$ का $x = 1$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है।

विकल्प (A) सही है

और $f''(1^-) \neq f''(1^+)$

$\Rightarrow$ f', $x = 1$ पर अवकलनीय नहीं है

विकल्प (B) सही है

$f(x)$ का परिसर $(-\infty, \infty)$ है।

$\therefore$ f आच्छादक है $\Rightarrow$ विकल्प (C) सही है

$x < 0$ के लिए, $f'(x) = 5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 20x + 3$.

यहाँ $f'(-1) < 0$

$\therefore$ $f(x)$, $(-\infty, 0)$ पर एकदिष्ट रूप से वर्धमान नहीं है।

3. माना Γ, वक्र $y = y(x)$ को दर्शाता है जो प्रथम चतुर्थांश में स्थित है और माना बिंदु $(1, 0)$ इस पर स्थित है। माना Γ के बिंदु P पर स्पर्श रेखा y-अक्ष को Y_P पर प्रतिच्छेद करती है। यदि Γ पर प्रत्येक बिंदु P के लिए PY_P की लंबाई 1 है, तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $xy' - \sqrt{1-x^2} = 0$

(B) $xy' + \sqrt{1-x^2} = 0$

(C) $y = \log_e\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$

(D) $y = -\log_e\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}$

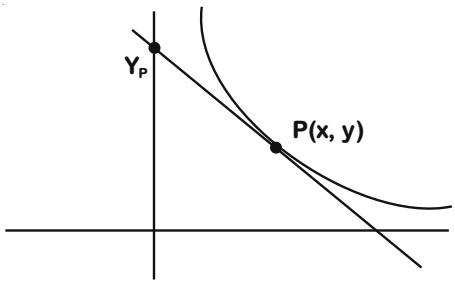
उत्तर (B, C)

हल माना बिंदु $P(x, y)$

P पर स्पर्श रेखा का समीकरण है;

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

अतः $Y_P\left(0, y - x\frac{dy}{dx}\right)$



$$PY_P = \sqrt{x^2 + \left(x\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \pm\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)dx \text{ माना } x = \sin\theta,\ dx = \cos\theta d\theta$$

$\Rightarrow$ $dy = \pm(\text{cosec}\theta - \sin\theta)\, d\theta$

$\Rightarrow$ $y = \pm[\ln(\text{cosec}\theta - \cot\theta) + \cos\theta] + C$

$\Rightarrow$ $y = \pm[-\ln(\text{cosec}\theta + \cot\theta) + \cos\theta] + C$

$$y = \pm\left[-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \sqrt{1-x^2}\right] + C$$

चूँकि वक्र, 1st चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए y धनात्मक होगा

$$y = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2} + C$$

$\because$ $y(1) = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) - \sqrt{1-x^2}$$

इसी प्रकार सही अवकल समीकरण होगी

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad xy' + \sqrt{1-x^2} = 0$$

4. एक असमकोण त्रिभुज ΔPQR में, माना p,q,r क्रमशः P, Q, R पर कोणों के सम्मुख भुजाओं की लंबाईयों को दर्शाते हैं। R से माध्यिका, भुजा PQ से S पर मिलती है, P से लंब, भुजा QR से E पर मिलता है और RS व PE, बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते है। यदि $p = \sqrt{3}$, $q = 1$ और ΔPQR के परिवृत्त की त्रिज्या का मान 1 है, तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) ΔSOE का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{12}$

(B) RS की लंबाई $= \frac{\sqrt{7}}{2}$

(C) OE की लंबाई $= \frac{1}{6}$

(D) ΔPQR के अंतः वृत्तों की त्रिज्या $= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

उत्तर (B, C, D)

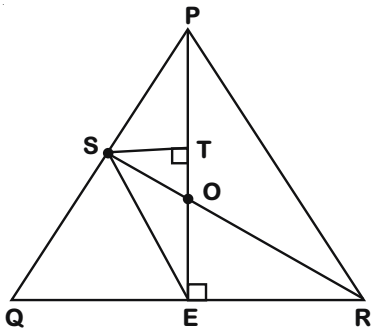
हल $\because$ $\frac{p}{\sin P} = \frac{q}{\sin Q} = \frac{r}{\sin R} = 2 \times$ परित्रिज्या (ज्या नियम)

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{\sin P} = \frac{1}{\sin Q} = \frac{r}{\sin R} = 2$$

स्पष्टतः, $P = 120°$, $Q = 30°$ तथा $R = 30°$

अतः PQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है

$r = 1$ और PE भी एक माध्यिका है, अतः बिंदु 'O' केन्द्रक है।



(A) ΔSOE का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} OE \times ST$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times PS \sin 60°$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{48}$$

(B) अपोलोनियस की प्रमेय से

$$2\left(PS^2 + RS^2\right) = PR^2 + QR^2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4} + RS^2\right) = 1 + 3 \Rightarrow RS = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

(C) पुनः अपोलोनियस की प्रमेय से

$$2(PE^2 + QE^2) = PQ^2 + PR^2 \Rightarrow 2\left(PE^2 + \frac{3}{4}\right) = 1+1 \Rightarrow PE = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार $OE = \frac{1}{3}PE = \frac{1}{6}$

(D) अंत: त्रिज्या $= \frac{\Delta}{S} = \frac{\frac{1}{2}pq\sin R}{\frac{1}{2}(p+q+r)} = \frac{\sqrt{3}\times 1\times\frac{1}{2}}{1+1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

5. माना $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix}$ व adj $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

जहाँ a व b वास्तविक संख्याऐं हैं। निम्न में से कौनसा विकल्प सही है/हैं?

(A) $a + b = 3$

(B) $(\text{adj } M)^{-1} + \text{adj } M^{-1} = -M$

(C) यदि $M = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, तब $\alpha - \beta + \gamma = 3$

(D) $\det(\text{adj } M^2) = 81$

उत्तर (A, B, C)

हल $|\text{adj } M| = |M|^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1(6-6) - 1(-8+10) - 1(24-30)$

$|M|^2 = -2 + 6 = 4 \Rightarrow |M| = \pm 2$

हमें ज्ञात हैं कि

$A.(\text{adj } A) = |A|\, I$

अत: $M = |M|\,(\text{adj } M)^{-1}$ ...(1)

अत: $(\text{adj } M^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

अब समीकरण (1) से

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & b & 1 \end{bmatrix} = |M| \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & -1 \\ \frac{-1}{2} & -1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

तुलना द्वारा $|M| = -2$

इसलिए $a = |M|\,(-1) = -2(-1) = 2$

और $b = |M| \times \frac{-1}{2} = 1$

(A) $a + b = 2 + 1 = 3$

(B) $(\text{adj } M)^{-1} + \text{adj } M^{-1}$
$= 2\text{adj}(M^{-1})$
$= 2\left(\frac{-M}{2}\right)$
$= -M$

$\because$ $\text{adj } A^{-1} = (\text{adj } A)^{-1}$
$\because$ $A.\text{adj } A = |A|I_n$
$\text{adj } A = A^{-1}|A|$
अत: $\text{adj } (M^{-1}) = (M^{-1})^{-1}|M^{-1}|$
$\text{adj } (M^{-1}) = M|M|^{-1}$
$\text{adj}(M^{-1}) = \frac{M}{|M|} = \frac{-M}{2}$

(C) $\because$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

अत: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

अत: $\beta + 2\gamma = 1$ ...(2)
$\alpha + 2\beta + 3\gamma = 2$ ...(3)
$3\alpha + \beta + \gamma = 3$ ...(4)
समीकरण (2), (3) व (4) से
$\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 1$
अत: $\alpha - \beta + \gamma$ का मान $= 1 - (-1) + 1 = 3$

(D) $|\text{adj } (M^2)| = |M^2|^2 = |M|^4 = |-2|^4 = 16$

6. माना α व β, समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल हैं, जहाँ $\alpha > \beta$ सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए,

$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $n \geq 1$,

$b_1 = 1$ और $b_n = a_{n-1} + a_{n+1}$, $n \geq 2$ परिभाषित कीजिए।

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{10}{89}$

(B) सभी $n \geq 1$ के लिए, $b_n = \alpha^n + \beta^n$

(C) सभी $n \geq 1$ के लिए, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = a_{n+2} - 1$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n} = \frac{8}{89}$

उत्तर (A, B, C)

हल (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha - \beta)10^n}$

$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{10}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{10}\right)^n\right]$

$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{\frac{\alpha}{10}}{1 - \frac{\alpha}{10}} - \frac{\frac{\beta}{10}}{1 - \frac{\beta}{10}}\right]$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha}{10-\alpha}-\frac{\beta}{10-\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{10\alpha-\alpha\beta-10\beta+\alpha\beta}{100-10\beta-10\alpha+\alpha\beta}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{10(\alpha-\beta)}{100-10-1}\right] = \frac{10}{89}$$

(B) $a_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \alpha.\beta^{n-1} + \beta^n$

{$\because$ $\alpha\beta = -1$}

$a_{n+1} = \alpha^n - (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \beta^{n-2}) + \beta^n$

$\Rightarrow$ $a_{n+1} = \alpha^n + \beta^n - a_{n-1}$

$\Rightarrow$ $a_{n-1} + \alpha_{n+1} = \alpha^n + \beta^n$

$\Rightarrow$ $b_n = \alpha^n + \beta^n$

(C) $\because$ $\alpha^2 = \alpha + 1$ और $\beta^2 = \beta + 1$

$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ और $\beta^{n+2} = \beta^{n+1} + \beta^n$

$\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + (\alpha^n - \beta^n)$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ...(i)

इसी प्रकार, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ...(ii)

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ...(iii)

$a_3 = a_2 + a_1$

योगफल करने पर $a_{n+2} = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + a_2$ (यहाँ $a_2 = \alpha + \beta = 1$)

$a_{n+2} - 1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n+\beta^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{10}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{10}\right)^n$

$$= \frac{\frac{\alpha}{10}}{1-\frac{\alpha}{10}} + \frac{\frac{\beta}{10}}{1-\frac{\beta}{10}} \qquad \because \left|\frac{\alpha}{10}\right| < 1$$

$$\left|\frac{\beta}{10}\right| < 1$$

$$= \frac{\alpha}{10-\alpha} + \frac{\beta}{10-\beta}$$

$$= \frac{10\alpha-\alpha\beta+10\beta-\alpha\beta}{(10-\alpha)(10-\beta)}$$

$$= \frac{10(1)-2(-1)}{100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{12}{89}$$

7. माना L_1 व L_2 रेखाओं क्रमश:

$\vec{r} = \hat{i} + \lambda(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}), \lambda \in \mathbb{R}$ व

$\vec{r} = \mu(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}), \mu \in \mathbb{R}$

को दर्शाते हैं। यदि रेखा L_3 दोनों L_1 व L_2 के लंबवत् है और दोनों को काटती है, तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प L_3 का वर्णन करता/ते है?

(A) $\vec{r} = \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in \mathbb{R}$

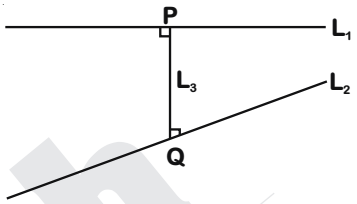
(B) $\vec{r} = \frac{2}{9}(4\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in \mathbb{R}$

(C) $\vec{r} = \frac{2}{9}(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in \mathbb{R}$

(D) $\vec{r} = t(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}), t \in \mathbb{R}$

उत्तर (A, B, C)

हल $\because$ L_3, दोनों L_1 व L_2 के लंबवत् है



तब L_3 के अनुदिश सदिश होगा,

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$$

L पर एक बिंदु $P(-\lambda + 1, 2\lambda, 2\lambda)$ व L_2 पर एक बिंदु $Q(2\mu, -\mu, 2\mu)$ लीजिए।

L_3 के दिक् अनुपात $< 2\mu + \lambda - 1, -\mu - 2\lambda, 2\mu - 2\lambda >$

यहाँ $\frac{2\mu + \lambda - 1}{2} = \frac{-\mu - 2\lambda}{2} = \frac{2\mu - 2\lambda}{-1}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$ और $\mu = \frac{2}{9}$

$P\left(\frac{8}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$ और $Q\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right)$; PQ का मध्य बिंदु $R\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$ है

L_3 का समीकरण $\vec{r} = \vec{a} + \lambda(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ है, यहाँ $\vec{a}$, L_3 पर किसी बिंदु का स्थिति सदिश है।

$\vec{a}$ के स्थिति सदिश $\left(\frac{8}{9}\hat{i} + \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}\right)$ अथवा $\left(\frac{4}{9}\hat{i} - \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{4}{9}\hat{k}\right)$ अथवा $\left(\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)$ हैं।

8. दीर्घवृत्तों के संग्रह $\{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$ व आयतों के संग्रह $\{R_1, R_2, R_3, \ldots\}$ निम्नानुसार परिभाषित हैं:

$E_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$

R_1 : महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत जिसकी भुजाऐं अक्षों के समान्तर हैं, E_1 में अंत: स्थित है;

E_n : महत्तम क्षेत्रफल वाला दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$, R_{n-1}, $n > 1$ में अंत: स्थित है

R_n : महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत, जिसकी भुजाऐं अक्षों के समान्तर है, E_n, $n > 1$ में अंत: स्थित है।

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) E_{18} व E_{19} की उत्केन्द्रताऐं बराबर नहीं हैं

(B) E_9 के नाभिलम्ब की लंबाई $\frac{1}{6}$ है

(C) प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक N के लिए, $\sum_{n=1}^{N}$ (R_n का क्षेत्रफल) < 24

(D) E_9 में केन्द्र से नाभि की दूरी $\frac{\sqrt{5}}{32}$ है

उत्तर (B, C)

हल $E_1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (यहाँ a = 3 और b = 2)

माना R_1 का एक शीर्ष $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ है

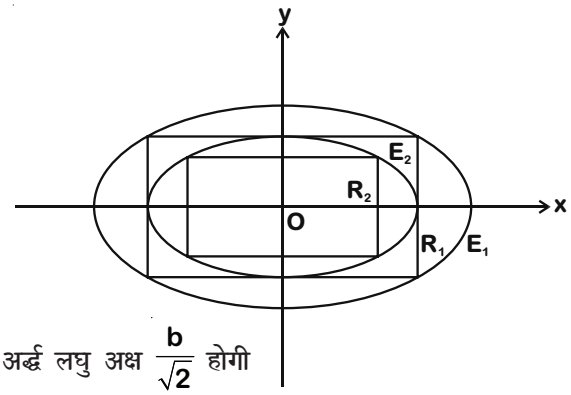
R_1 का क्षेत्रफल $= 2a\cos\theta \times 2b\sin\theta$

$= 2ab\sin 2\theta$

R_1 का क्षेत्रफल अधिकतम होगा यदि

$\theta = \frac{\pi}{4}$

अत:, R_1 का अधिकतम क्षेत्रफल $= 2ab$



अब, दीर्घवृत्त E_2 का अर्द्ध दीर्घ अक्ष $\frac{a}{\sqrt{2}}$ होगी और अर्द्ध लघु अक्ष $\frac{b}{\sqrt{2}}$ होगी

$E_2 : \frac{x^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$; R_2 का अधिकतम क्षेत्रफल $= 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

इसी प्रकार $E_3 : \frac{x^2}{\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{(\sqrt{2})^2}\right)^2} = 1$ तथा इसी प्रकार आगे।

अत:, $E_n : \frac{x^2}{\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right)^2} = 1$

और R_n का अधिकतम क्षेत्रफल $= 2\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right)\left(\frac{b}{(\sqrt{2})^{n-1}}\right)$

(A) सभी दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रताऐं समान हैं क्योंकि सभी दीर्घवृत्तों के लिए अर्द्ध दीर्घ अक्ष और अर्द्ध लघु अक्ष का अनुपात समान है।

$e = \sqrt{1 - \frac{b_n^2}{a_n^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(B) E_n के नाभिलम्ब की लंबाई $= \frac{2b_n^2}{a_n^2} = \frac{2b^2}{a(\sqrt{2})^{n-1}}$

E_9 के नाभिलम्ब की लंबाई $= \frac{2\times 4}{3\times(\sqrt{2})^{9-1}} = \frac{1}{6}$

(C) $\sum_{n=1}^{m}$ आयत R_n का क्षेत्रफल < R_1 का क्षेत्रफल + R_2 का क्षेत्रफल + ... ∞

$\sum_{n=1}^{m}$ आयत R_n का क्षेत्रफल $< 2ab + 2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(\frac{a}{(\sqrt{2})^2}\right)\left(\frac{b}{(\sqrt{2})^2}\right) + ...\infty$

$\sum_{n=1}^{m}$ आयत R_n का क्षेत्रफल $< 2ab\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ...\infty\right]$

$\sum_{n=1}^{m}$ आयत R_n का क्षेत्रफल $< 12\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$\sum_{n=1}^{m}$ आयत R_n का क्षेत्रफल < 24

(D) E_9 की नाभि तथा केन्द्र के मध्य दूरी $= a_9.e$

$= \frac{a}{(\sqrt{2})^8}.e = \frac{3}{2^4}.\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{16}$

खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 18)

- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

पूर्ण अंक : **+3** यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

शून्य अंक : **0** अन्य सभी स्थितियों में।

---

1. तीन रेखाऐं

$\vec{r} = \lambda\hat{i}, \lambda \in \mathbb{R}$

$\vec{r} = \mu(\hat{i}+\hat{j}), \mu \in \mathbb{R}$ व

$\vec{r} = \nu(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}), \nu \in \mathbb{R}$ द्वारा दी गयी है।

माना रेखाऐं, समतल $x + y + z = 1$ को क्रमशः बिंदुओं **A, B** व **C** पर काटती है। यदि त्रिभुज **ABC** का क्षेत्रफल Δ है, तब $(6\Delta)^2$ का मान है

उत्तर (0.75)

हल **बिंदु A ज्ञात करने के लिए**

$\vec{r} = \lambda\hat{i}$ व $x + y + z = 1$, यहाँ

$\lambda + 0 + 0 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow A = (1, 0, 0)$

इसी प्रकार बिंदु B के लिए

$\vec{r} = \mu(\hat{i}+\hat{j})$ और $x+y+z=1$

यहाँ $\mu + \mu + 0 = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

और बिंदु **C** के लिए, $\vec{r} = \nu(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) \Rightarrow \nu = \frac{1}{3} \Rightarrow C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

त्रिभुज **ABC** का क्षेत्रफल

$\Delta = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$\left(\text{अर्थात्} \quad \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} \quad \text{और} \quad \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)$

$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)\right|$

$= \frac{\sqrt{3}}{12} \Rightarrow (6\Delta)^2 = \left(\frac{6\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0.75$

2. यदि $I = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}$

तब 27 I^2 का मान है

उत्तर (4.00)

हल $$I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}$$

$$I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(1+e^{-\sin x})(2-\cos 2x)} = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x}dx}{(1+e^{\sin x})(2-\cos 2x)}$$

$$2I = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(2-\cos 2x)} \Rightarrow I = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(2-\cos 2x)}$$

$$I = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{3-2\cos^2 x} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{1+3\tan^2 x}$$

$\sqrt{3}\tan x = t$ का मान रखने पर $\Rightarrow \sec^2 x\,dx = \frac{dt}{\sqrt{3}}$

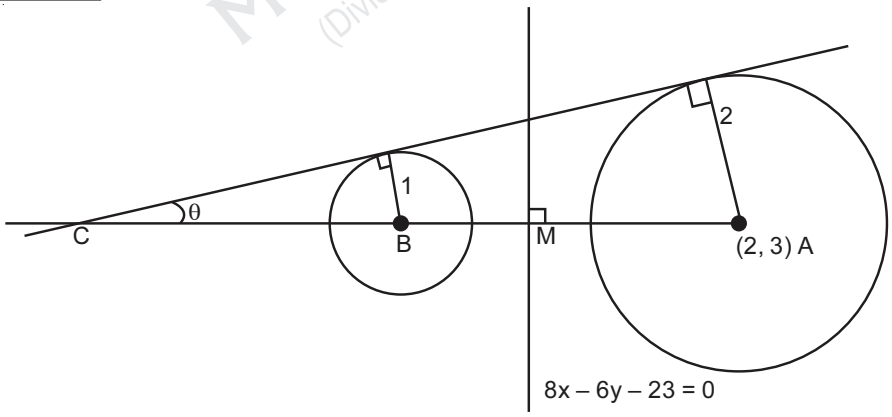
$$I = \frac{2}{\pi}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi}\left[\tan^{-1}t\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}\pi}\times\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad 27I^2 = 27\times\frac{4}{9\times 3} = 4.00$$

3. माना बिंदु B, रेखा $8x - 6y - 23 = 0$ के सापेक्ष बिंदु A(2, 3) का प्रतिबिम्ब है। माना Γ_A व Γ_B, त्रिज्याओं 2 व 1 वाले वृत्त है जिनके केन्द्र क्रमश: A व B है। माना T, वृत्तों Γ_A व Γ_B की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है जबकि दोनों वृत्त, T के एक ही ओर स्थित है। यदि बिंदु C, T व A तथा B से गुजरने वाली रेखा का प्रतिच्छेदी बिंदु है, तब रेखावखण्ड AC की लंबाई का मान है _____

उत्तर (10.00)

हल



$$BM = AM = \frac{|8\times 2 - 6\times 3 - 23|}{\sqrt{64+36}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ AB = 5

$$\sin\theta = \frac{1}{CB} = \frac{2}{CB+AB} \Rightarrow \frac{1}{CB} = \frac{2}{CB+5} \Rightarrow CB = 5$$

$\Rightarrow$ AC = 10.00

4. माना स.श्रे. (a;d), एक अनन्त समान्तर श्रेणी के सभी पदों का समुच्चय दर्शाता है, जिसका प्रथम पद a व सार्व अंतर d > 0 है। यदि

स.श्रे.(1;3) ∩ स.श्रे.(2;5) ∩ स.श्रे.(3;7) = स.श्रे.(a;d)

तब a + d का मान है

उत्तर (157.00)

हल $T_{(1, m)} = T_{(2, n)} = T_{(3, r)}$

$T_{(1, m)}$, प्रथम श्रेणी का m^{th} पद है, $T_{(2, n)}$, द्वितीय श्रेणी का n^{th} पद है और $T_{(3, r)}$, तृतीय श्रेणी का r^{th} पद है

$\Rightarrow$ $1 + (m - 1)3 = 2 + (n - 1)5 = 3 + (r - 1)7$

1^{st} व 2^{nd} श्रेणियों के उभयनिष्ठ पदों के लिए,

$$m = \frac{5n-1}{3} \Rightarrow n = 2, 5, 11, ...$$

2^{nd} व 3^{rd} श्रेणियों के उभयनिष्ठ पदों के लिए,

$$r = \frac{5n+1}{7} \Rightarrow n = 4, 11, ...$$

$\Rightarrow$ 1^{st}, 2^{nd} व 3^{rd} श्रेणियों का प्रथम उभयनिष्ठ पद है (जब n = 11)

$a = 2 + (11 - 1)5 = 52$

d = ल.स.प. (3, 5, 7) = 105

$\Rightarrow$ a + d = 157.00

5. माना S, सभी 3 × 3 क्रम की मैट्रिक्स जिनकी प्रविष्टियाँ समुच्चय (0, 1) से हैं, का प्रतिदर्श समष्टि है। माना घटना E_1 व E_2,

$E_1 = \{A \in S : \det A = 0\}$ और

$E_2 = \{A \in S : A$ की प्रविष्टियों का योगफल 7 है$\}$ द्वारा दी गयी हैं।

यदि एक मैट्रिक्स यादृच्छया S में से चयनित की जाती है, तब प्रतिबंधात्मक प्रायिकता $P(E_1|E_2)$ का मान है

उत्तर (0.50)

हल योगफल 7 के लिए, यहाँ सात 1 s और दो शून्यकों की आवश्यकता है

$\therefore$ विभिन्न संभावित मैट्रिक्स की संख्या $= \frac{9!}{7!2!} = 36 = n(E_2)$

|A| = 0 के लिए, दोनों शून्यकों का समान पंक्ति/स्तम्भ में होना आवश्यक है

$\therefore$ मैट्रिक्स की संख्या, जबकि इनके सारणिक का मान शून्य है

$$\text{शून्य} = 6 \times \frac{3!}{2!} = 18 = n(E_1 \cap E_2)$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(E_2)}$

$$= \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

6. माना $\omega \neq 1$, इकाई का घनमूल है। तब समुच्चय $\{|a + b\omega + c\omega^2|^2 : a, b, c$ भिन्न अशून्य पूर्णांक है$\}$ का न्यूनतम मान है

उत्तर (3.00)

हल $\left|a+b\omega+c\omega^2\right|^2 = \left(a+b\omega+c\omega^2\right)\left(\overline{a+b\omega+c\omega^2}\right)$

$= (a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$

$\because$ a, b, c भिन्न अशून्य पूर्णांक हैं

$\therefore$ न्यूनतम मान के लिए a = 1, b = 2 और c = 3.

$\therefore$ न्यूनतम मान $= \frac{1}{2}\{1+1+4\} = 3$

❑ ❑ ❑

Aakash Medical | IIT-JEE | Foundations (Divisions of Aakash Educational Services Pvt. Ltd.)