DATE : 27/05/2019

(हिन्दी संस्करण)

Aakash
Medical | IIT-JEE | Foundations
(Divisions of Aakash Educational Services Limited)
*Regd. Office* : Aakash Tower, 8, Pusa Road, New Delhi-110005
Ph.: 011-47623456 Fax : 011-47623472

Time : 3 hrs.

# Questions & Answers

*for*

# JEE (Advanced)-2019

## PAPER - 2

Max. Marks: 186

## PART-I : PHYSICS

**खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 32)**

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | +4 | यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | +3 | यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | +2 | यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो; |
| *आंशिक अंक* | : | +1 | यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो; |
| *शून्य अंक* | : | 0 | यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | –1 | सभी अन्य स्थितियों में। |

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित (A), (B) तथा (D) एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

केवल (A), (B) व (D) का चयन किये जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) व (B) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (B) व (D) का चयन किये जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

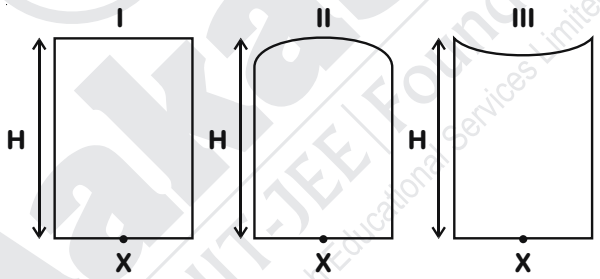
केवल (B) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

केवल (D) का चयन किये जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) 0 अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर –1 अंक प्राप्त होगा।

---

1. समान ऊचाँई $H = 30$ cm तथा समान अपवर्तनांक $n = 1.5$ के तीन काँच बेलनों को चित्र में दर्शाये अनुसार क्षैतिज सतह पर रखा जाता है। बेलन I की शीर्ष सतह समतल है, बेलन II का उत्तलाकार शीर्ष है तथा बेलन III का अवतलाकार शीर्ष है। दोनों वक्राकार शीर्षो की वक्रता त्रिज्या समान ($R = 3$ m) है। यदि $H_1$, $H_2$, तथा $H_3$ तीनों बेलनों के पेंदे पर बिंदु X की आभासी गहराईयाँ हैं, तब सही कथन है/हैं:




(A) $0.8\text{ cm} < (H_2 - H_1) < 0.9\text{ cm}$

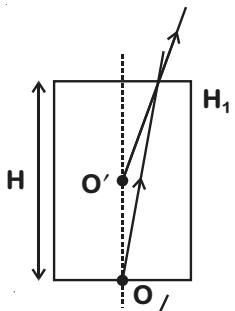
(B) $H_2 > H_3$

(C) $H_3 > H_1$

(D) $H_2 > H_1$

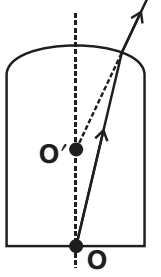
**उत्तर** (B, D)

**हल** **स्थिति I.**




$$H_1 = \frac{H}{\mu} = \frac{30\times 2}{3} = 20\text{ cm (नीचे)}$$

**स्थिति II.**

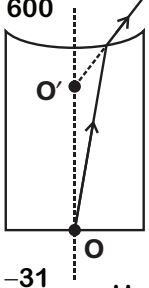



$$\frac{1}{V} + \frac{3}{2H} = \frac{1-1.5}{-R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2\times 300} \quad \Rightarrow \frac{1}{V}=\frac{1}{600}-\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V}=\frac{-29}{600} \quad \therefore H_2=\frac{600}{29}=20.68 \text{ cm (नीचे)}$$

**स्थिति III**




$$\frac{1}{V}+\frac{3}{2H}=\frac{-1}{2\times 300} \Rightarrow \frac{1}{V}=\frac{-1}{600}-\frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V}=\frac{-31}{600} \Rightarrow H_3=\frac{600}{31}=19.35 \text{ cm}$$

$H_2 - H_1 \simeq 20.68 - 20 \approx 0.68$

$H_2 > H_1$ तथा $H_2 > H_3$

लेकिन $H_1 > H_3$

2. द्रव्यमान **M** तथा लम्बाई **L** की एक पतली तथा समरूप छड़ को अत्यधिक घर्षण वाले फर्श पर उर्ध्वाधर रखा जाता है। छड़ को विरामावस्था से इस प्रकार छोड़ा जाता है कि यह बिना फिसले फर्श के साथ अपने संपर्क बिंदु के सापेक्ष घूर्णन करते हुए गिरती है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं, जब छड़ उर्ध्वाधर के साथ 60° कोण निर्मित करती है?

[g, गुरूत्वीय त्वरण है]

(A) छड़ का कोणीय त्वरण $\frac{2g}{L}$ होगा

(B) छड़ के द्रव्यमान केंद्र का अरीय त्वरण $\frac{3g}{4}$ होगा

(C) छड़ की कोणीय चाल $\sqrt{\frac{3g}{2L}}$ होगी

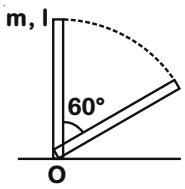
(D) छड़ पर फर्श से अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल $\frac{Mg}{16}$ होगा

**उत्तर (B, C, D)**

**हल** ऊर्जा संरक्षण प्रयुक्त करने पर (चूंकि घर्षण फिसलन विहिन बिंदु पर कार्यरत है)

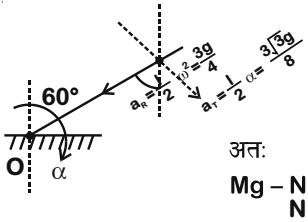
$$\frac{MgI}{2}(1-\cos 60°)=\frac{1}{2}I_0\omega^2$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{3g}{2I}} \quad \left(I_0=\frac{MI^2}{3}\right)$$




तथा $\tau_0=Mg\frac{I}{2}\sin 60°=I_0\alpha$

$$\therefore \alpha=\frac{3\sqrt{3}g}{4I}$$




छड़ के द्रव्यमान केंद्र के लिए

$a_y=a_T\sin 60°+a_R\cos 60°$

अतः

$Mg - N = Ma_y$

$N=\frac{Mg}{16}$

$$= \frac{I}{2}\alpha \sin 60^\circ + \frac{\omega^2 I}{2}\cos 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{3\sqrt{3}g}{4}\right] + \frac{3g}{2l} \times \frac{l}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{9}{16} + \frac{3}{8}\right)g = \frac{15g}{16}$$

3. एक मुक्त हाइड्रोजन परमाणु तरंगदैर्ध्य $\lambda_a$ का एक फोटॉन अवशोषित करने के बाद अवस्था $n = 1$ से अवस्था $n = 4$ तक उत्तेजित होता है। इसके तुरंत बाद इलेक्ट्रॉन तरंगदैर्ध्य $\lambda_e$ का एक फोटॉन उत्सर्जित कर अवस्था $n = m$ में संक्रमण करता है। माना अवशोषण तथा उत्सर्जन के कारण परमाणु के संवेग में परिवर्तन क्रमशः $\Delta p_a$ तथा $\Delta p_e$ है। यदि $\lambda_a / \lambda_e = \frac{1}{5}$, निम्न में से कौनसा/कौनसे विकल्प सही है/हैं?

[hc = 1242 eV nm: 1 nm = $10^{-9}$ m, h तथा c क्रमशः प्लांक नियतांक तथा प्रकाश की चाल हैं]

(A) $\lambda_e = 418$ nm

(B) $\Delta p_a / \Delta p_e = \frac{1}{2}$

(C) अवस्था $n = m$ से अवस्था $n = 1$ में इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा का अनुपात $\frac{1}{4}$ है

(D) $m = 2$

**उत्तर (C, D)**

**हल** $\frac{hc}{\lambda_a} = (E_4 - E_1)$ तथा $\frac{hc}{\lambda_e} = (E_4 - E_m)$

$$\Delta p_a = \frac{(E_4 - E_1)}{c} \text{ तथा } \Delta p_e = \frac{(E_4 - E_m)}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{(E_4 - E_m)}{E_4 - E_1} = \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}$$

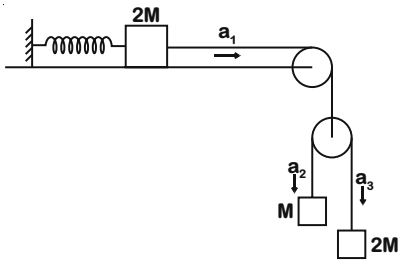
$$\Rightarrow \frac{15}{16 \times 5} = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{m^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow m = 2$$

$$\frac{\Delta p_a}{\Delta p_e} = \frac{(E_4 - E_1)}{(E_4 - E_m)} = \frac{15 \times 16}{16 \times 3} = 5$$

$$\frac{hc}{\lambda_e} = (13.6 \text{ eV}) \times \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{1242 \times 16}{3 \times 13.6} \text{ nm} = \lambda_e \cong 487 \text{ nm}$$

4. द्रव्यमान $2M$ के ब्लॉक को स्प्रिंग नियतांक $k$ वाली एक द्रव्यमानहीन स्प्रिंग से संयोजित किया जाता है। इस ब्लॉक को दो द्रव्यमानहीन घिरनियों तथा रस्सियों द्वारा द्रव्यमान $M$ तथा $2M$ के दो अन्य ब्लॉकों से संयोजित किया जाता है। ब्लॉकों के त्वरण चित्र में दर्शाये अनुसार $a_1$, $a_2$ तथा $a_3$ हैं। निकाय को विरामावस्था से छोड़ा जाता है तथा स्प्रिंग अपनी अवितान्य अवस्था में है। स्प्रिंग का अधिकतम प्रसार $x_0$ है। निम्न में से कौनसा/कौनसे विकल्प सही है/हैं?

[g, गुरूत्वीय त्वरण है, घर्षण को नगण्य मानते है]




(A) स्प्रिंग के $\frac{x_0}{4}$ के प्रसार पर, स्प्रिंग से संयोजित ब्लॉक के त्वरण का परिमाण $\frac{3g}{10}$ है

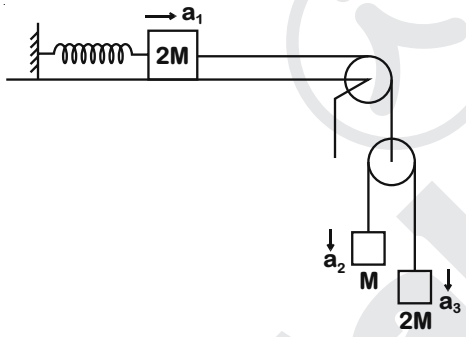
(B) $x_0 = \frac{4\,Mg}{k}$

(C) $a_2 - a_1 = a_1 - a_3$

(D) जब स्प्रिंग पहली बार $\frac{x_0}{2}$ का प्रसार प्राप्त करती है, तब स्प्रिंग से संयोजित ब्लॉक की चाल $3g\sqrt{\frac{M}{5k}}$ है

**उत्तर (C)**

**हल** प्रतिबंधित सम्बंध प्रयुक्त करने पर




$2a_1 = a_2 + a_3$

$a_1 - a_3 = a_2 - a_1$

तथा

$2mg - T = 2ma_3$ ...(1)

$mg - T = ma_2$ ...(2)

तथा $2T - kx = 2ma_1$ ....(3)

उपरोक्त समीकरण हल करने पर, $T = \frac{4mg}{7} + \frac{2kx}{7}$ तथा $a_1 = \frac{4g}{7} - \frac{3kx}{14m}$

$x$ के लिए $= \frac{x_0}{4} = \frac{4mg}{3k}$

$a_1 = \frac{4g}{7} - \frac{2g}{7} = \frac{2g}{7}$

द्रव्यमान '2m' के दोलन (माध्य स्थिति पर) के लिए

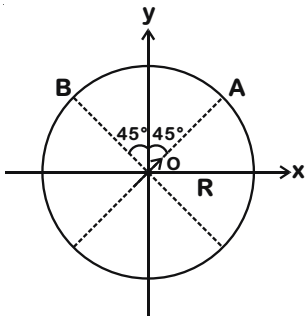
$a_1 = 0 \Rightarrow x = \frac{8mg}{3k}$ (आयाम)

$\therefore \quad x_0 = 2A = \frac{16mg}{3k}$ तथा $\omega = \sqrt{\frac{3k}{14m}}$

तथा $v_{x=\frac{x_0}{2}\text{(माध्य) पर}} = A\omega$

$= \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{3k}{14m}} = \frac{8mg}{3k}\sqrt{\frac{3k}{14m}}$

5. द्विध्रुव आघूर्ण $\frac{p_0}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ वाले एक विद्युत द्विध्रुव को परिमाण $E_0$ के एक समरूप विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में मूल बिंदु O पर द्वढ़ित रखा जाता है। यदि चित्र में दर्शाये अनुसार मूल बिंदु पर केंद्र वाले R त्रिज्या के एक वृत्त पर विभव नियत है, तब सही कथन है/हैं: ($\in_0$ मुक्त त्रिविम की विद्युतशीलता है। R >> द्विध्रुव का आकार)




(A) बिंदु B पर कुल विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_B = 0$ है

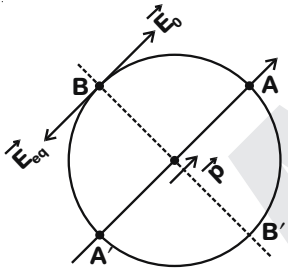
(B) बिंदु A पर कुल विद्युत क्षेत्र $\vec{E}_A = \sqrt{2}E_0(\hat{i}+\hat{j})$ है

(C) $R = \left(\frac{p_0}{4\pi\in_0 E_0}\right)^{1/3}$

(D) वृत्त के किन्ही दो बिंदुओं पर कुल विद्युत क्षेत्र का परिमाण समान होगा

**उत्तर** (A, C)

**हल**



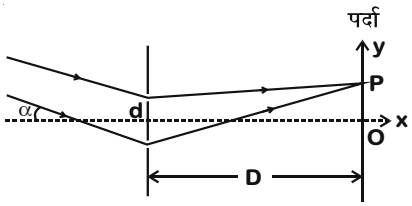

$E_0 \to$ r त्रिज्या के एक समविभव वृत्त के लिए $\vec{p} = \frac{p_0}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ की दिशा में बाह्य क्षेत्र, बिंदु B द्विध्रुव का (निरक्षीय) बिंदु है।

इसलिए $\frac{kp_0}{R^3} = E_0$

$\therefore \quad R = \left(\frac{kp_0}{E_0}\right)^{1/3} = \left(\frac{p_0}{4\pi\in_0 E_0}\right)^{1/3}$ तथा $\vec{E}_A = \frac{2k\vec{p}}{R^3} + \vec{E}_0 = 3\vec{E}_0$

तथा $E_B = 0$

6. यंग के द्विस्लिट प्रयोग में, स्लिट दूरी d का मान 0.3 mm है तथा पर्दे की दूरी D का मान 1 m है। तरंगदैर्ध्य 600 nm के प्रकाश का एक समान्तर पुन्ज चित्र में दर्शाये अनुसार $\alpha$ कोण पर स्लिटों पर आपतित होता है। पर्दे पर, बिंदु O स्लिटों से समदूरस्थ है तथा दूरी PO का मान 11.0 mm है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/ हैं?



(A) $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री के लिए, बिंदु P पर विनाशी व्यतिकरण होगा।

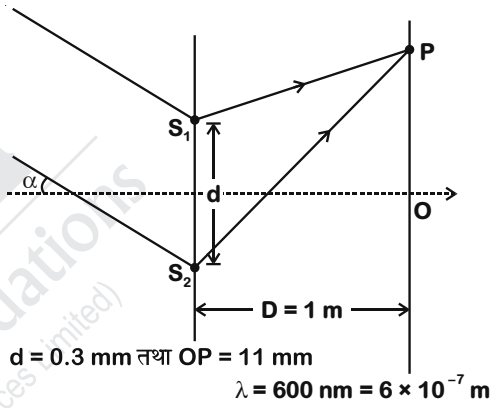
(B) फ्रिन्ज दूरी $\alpha$ पर निर्भर करती है।

(C) $\alpha = 0$ के लिए, बिंदु P पर संपोषी व्यतिकरण होगा।

(D) $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री के लिए, बिंदु O पर विनाशी व्यतिकरण होगा।

**उत्तर (A)**

**हल** बिंदु P के लिए कुल ज्यामितीय पथान्तर




d = 0.3 mm तथा OP = 11 mm

$\lambda = 600\ nm = 6 \times 10^{-7}\ m$

$$\Delta x = d\sin\alpha + \frac{yd}{D}$$

विकल्प (A) के लिए

$\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री, तब $\Delta x = 3900\ nm$

या $(2n-1)\frac{\lambda}{2} = \Delta x$ (विनाशी व्यतिकरण के लिए)

$\therefore \quad n = 7$

विकल्प (D) के लिए

यदि $\alpha = \frac{0.36}{\pi}$ डिग्री

तब $\Delta x_0 = d\alpha = 600\ nm$

या $\Delta x_0 = n\lambda$ ($n = 1$ के लिए)

(संपोषी व्यतिकरण)

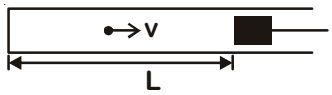
विकल्प (C) के लिए

$\Delta x_0 = 0$ तथा $\frac{yd}{D} = 3300\ nm$

चूंकि ($\alpha = 0$) (P पर विनाशी व्यतिकरण)

सभी उपरोक्त स्थिति में फ्रिन्ज चौड़ाई अपरिवर्तित रहती है।

7. द्रव्यमान **m** का एक छोटा कण एक भारी, खोखली तथा सीधी नलिका के अंदर नलिका के अक्ष के अनुदिश गतिशील है, कण दोनों सिरों पर प्रत्यास्थ रूप से टकराता है। नलिका में कोई घर्षण नहीं है तथा यह एक समतल सतह द्वारा एक सिरे पर बंद है जबकि दूसरे सिरे पर चित्र में दर्शाये अनुसार एक भारी गतिमान समतल पिस्टन लगा है। जब बंद सिरे से पिस्टन की दूरी $L = L_0$ है, तब कण की चाल $v = v_0$ है। पिस्टन को अत्यंत निम्न चाल **V** से अंदर की ओर इस प्रकार गति कराई जाती है कि $V << \frac{dL}{L} v_0$, जहाँ **dL** पिस्टन का अत्यन्त अल्प विस्थापन है। निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं?




(A) यदि पिस्टन अंदर की ओर **dL** तक गति करता है, कण की चाल $2v\frac{dL}{L}$ तक बढ़ती है

(B) जब पिस्टन को $L_0$ से $\frac{1}{2}L_0$ तक अंदर की ओर गति कराई जाती है, तब कण की गतिज ऊर्जा 4 के गुणक से बढ़ती है

(C) पिस्टन के साथ प्रत्येक टक्कर के बाद, कण की चाल **2V** तब बढ़ती है

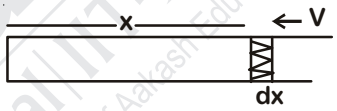
(D) वह दर जिस पर कण पिस्टन से टकराता है, $\frac{v}{L}$ है

**उत्तर** (B, C)

**हल** कण का प्रारंभिक वेग $v = v_0$ है

तथा पिस्टन की दूरी $x = L_0$.

**dx** ऋणात्मक है




$Vdt = -dx$ (पिस्टन द्वारा तय की गई दूरी)

$\therefore \quad dt = -\left(\frac{dx}{V}\right)$

'm' के लिए टक्कर का समय $\Rightarrow \quad dt' = \frac{2x}{V}$

sec के लिए टक्कर की संख्या $\Rightarrow \quad n = \frac{V}{2n}$ $\quad \therefore$ dt में टक्कर की कुल संख्या $N = -\left(\frac{V}{2x}\right)\frac{dx}{V}$ है

प्रति टक्कर चाल में परिवर्तन **2V** है

$\therefore$ 'dx' विस्थापन के लिए चाल में कुल परिवर्तन $dv = \frac{-vdx}{2xV} \cdot 2V$ है

$\Rightarrow |dV| = \frac{Vdx}{x}$, $x = L$ पर, $|dV| = \frac{v_0 dL}{L}$

अब, $\frac{dV}{V} = -dx \quad \therefore \quad \ln\left(\frac{V'}{V_0}\right) = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad V' = 2V_0$

$\therefore$ गतिज ऊर्जा 4 गुने तक बढ़ जाती है

8. आदर्श गैस के एक मिश्रण में 5 मोल एकलपरमाणुक गैस तथा 1 मोल दृढ़ द्विपरमाणुक गैस है, मिश्रण प्रारंभ में दाब $P_0$, आयतन $V_0$, तथा ताप $T_0$ पर है। यदि गैसीय मिश्रण रूद्धोष्म रूप से आयतन $\frac{V_0}{4}$ तक संपीड़ित होता है, तब सही कथन है/हैं

(दिया है $2^{1.2} = 2.3$; $2^{3.2} = 9.2$; R गैस नियतांक है)

(A) प्रक्रम के दौरान किया गया कार्य $|W|$ का मान $13RT_0$ है

(B) सम्पीड़न के बाद गैसीय मिश्रण का अंतिम दाब $9P_0$ तथा $10P_0$ के मध्य में है

(C) गैसीय मिश्रण का रूद्धोष्म नियतांक 1.6 है

(D) सम्पीड़न के बाद गैसीय मिश्रण की औसत गतिज ऊर्जा $18RT_0$ तथा $19RT_0$ के मध्य में है

**उत्तर** (A, B, C)

**हल** $\gamma_{\text{मिश्रण}} = \dfrac{5\times\frac{5R}{2}+\frac{7R}{2}}{5\times\frac{3R}{2}+1\times\frac{5R}{2}} = \dfrac{8}{5} = 1.6$

रूद्धोष्म प्रक्रम के लिए

$PV^{\gamma}$ = नियतांक

$$\therefore \quad P = P_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma} = (4)^{8/5}\cdot P_0 = 9.2\,P_0$$

$$\therefore \quad W = \frac{P_0V_0 - 9.2\,P_0\frac{V_0}{4}}{\gamma-1} = \frac{-13P_0V_0}{6}$$

जैसा कि हमें ज्ञात है $P_0V_0 = 6RT_0$

$\therefore \quad W = -13RT_0$

संपीड़न के बाद अंतिम ताप

$$T = T_0\left(\frac{PV}{P_0V_0}\right) = 2.3\,T_0$$

तथा, $(C_V)_{\text{मिश्रण}} = \dfrac{n_1C_{V_1}+n_2C_{V_2}}{n_1+n_2} = \dfrac{5R}{3}$

$\therefore$ गैस की औसत गतिज ऊर्जा $= U_f = nC_VT$

$$= 6\times\frac{5R}{3}\times 2.3T_0$$

$$= 23RT_0$$

## खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 18)

- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

*पूर्ण अंक* : **+3** यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

*शून्य अंक* : **0** अन्य सभी स्थितियों में।

1. माना एक $^{226}_{88}Ra$ नभिक विरामावस्था तथा आद्य अवस्था में है यह $\alpha$-क्षय से गुजरते हुए अपनी उत्तेजित अवस्था में $^{222}_{86}Rn$ नभिक में परिवर्तित होता है। उत्सर्जित $\alpha$ कण की गतिज ऊर्जा **4.44 MeV** पायी जाती है। तत्पश्चात् $^{222}_{86}Rn$ नभिक $\gamma$-क्षय द्वारा अपनी आद्य अवस्था में पहुँचता है। उत्सर्जित $\gamma$ फोटॉन की ऊर्जा _____ **keV** है।

[दिया है: $^{226}_{88}Ra$ का परमाणु द्रव्यमान = **226.005 u**, $^{222}_{86}Rn$ का परमाणु द्रव्यमान = **222.000 u**, $\alpha$ कण का परमाणु द्रव्यमान = **4.000 u**, **1 u = 931 MeV/c²**, **c** प्रकाश की चाल है]

**उत्तर** (135.00)

**हल** $\Delta m = [226.005 - 222 - 4]$

$= 0.005$ amu

$Q = \Delta mc^2$

$= 931.5 \times 0.005 = 4.655$ MeV

चूंकि संवेग संरक्षित रहता है, गतिज ऊर्जा द्रव्यमानों के व्युत्क्रम अनुपात में है

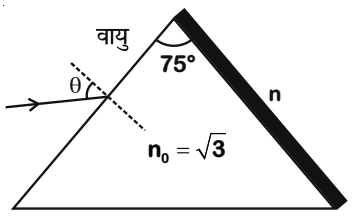
$K_T = 4.44 + K_{Rn}$

$$K_{Rn} = \frac{4.44 \times 4}{222} = 0.08 \text{ MeV}$$

$\gamma$-फोटॉन = 4.655 – 4.520

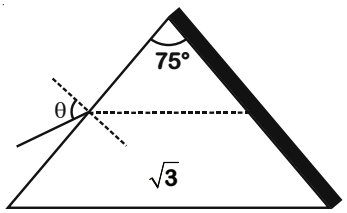
= 0.135 MeV = 135 keV

2. एकलवर्णीय प्रकाश वायु से कोण **75°** तथा अपवर्तनांक $n_0 = \sqrt{3}$ के प्रिज्म की अपवर्तक सतह पर आपतित होता है। प्रिज्म की दूसरी अपवर्तक सतह को चित्र में दर्शाए अनुसार अपवर्तनांक **n** के पदार्थ की एक पतली फिल्म द्वारा लेपित किया जाता है। प्रकाश आपतन कोण $\theta \leq 60°$ के लिए लेपित प्रिज्म सतह पर पूर्ण आंतरिक परावर्तित होता है। $n^2$ का मान _____ है।




**उत्तर** (1.50)

**हल** अन्य फलक पर पूर्ण आंतरिक परावर्तन के लिए




$$\sin\theta'_c = \frac{n}{\sqrt{3}}$$

पहली सतह पर स्नेल नियम

$$\sin\theta = \sqrt{3}\sin(75 - \theta'_c)$$

$\Rightarrow$ $\theta = 60°$ के लिए

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin(75 - \theta'_c)$$

$$\Rightarrow \quad \sin(75 - \theta'_c) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \theta'_c = 45°$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{3}}$$

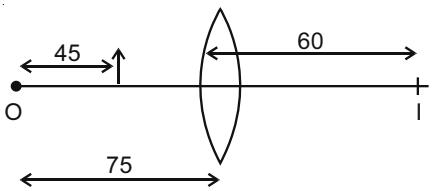
$$\Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad n^2 = \frac{3}{2} = 1.5$$

3. एक प्रकाशिक बेंच में 1.5 m लम्बा स्केल है जिसमें प्रत्येक cm में चार समान भाग है। एक उत्तल लेंस की फोकस दूरी के मापन के दौरान, लेंस को पैमाने के 75 cm चिन्ह् पर रखा जाता है तथा वस्तु पिन को 45 cm चिन्ह् पर रखा जाता है। लेंस के दूसरी ओर वस्तु पिन का प्रतिबिम्ब 135 cm चिन्ह् पर रखे प्रतिबिम्ब पिन के साथ अतिव्यापित होता है। इस प्रयोग में, लेंस की फोकस दूरी के मापन में प्रतिशत त्रुटि _____ हैं

**उत्तर** (1.38) या (1.39)

**हल** $|u| = x_2 - x_1 = 30$ cm




$\Delta u = 0.25 + 0.25 = 0.50$

$|v| = 60$ cm

$\Delta v = 0.05$ cm

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$f = 20$ cm

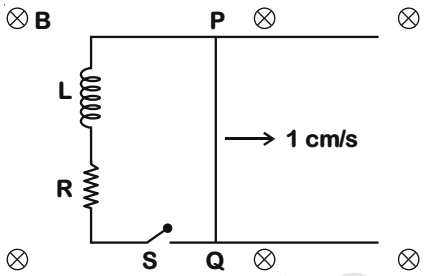
$$\frac{dv}{v^2} + \frac{du}{u^2} = \frac{df}{f^2}$$

$$400 \times \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3600} + \frac{1}{900}\right] = df$$

% त्रुटि = 1.38 या 1.39

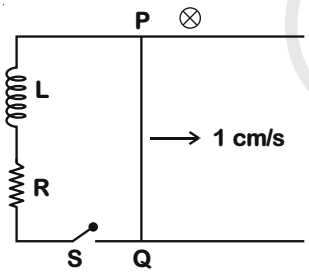
4. 10 cm लम्बा पूर्णतः चालक तार PQ शून्य प्रतिरोध की क्षैतिज पटरियों के युग्म पर 1 cm/s के वेग से गतिशील है, पटरियों का एक सिरा चित्र में दर्शाये अनुसार प्रेरक L = 1 mH तथा प्रतिरोध R = 1 Ω से संयोजित है। क्षैतिज पटरियाँ L तथा R तल के लम्बवत् एक समरूप चुम्बकीय क्षेत्र B = 1 T वाले समान तल में स्थित है। यदि कुंजी S को निश्चित क्षण पर बंद किया जाता है, तब 1 मिली सेकण्ड के बाद परिपथ में धारा $x \times 10^{-3}$ A है, जहाँ x का मान _____ है

[माना तार PQ का वेग (1 cm/s), कुंजी S को बंद करने के बाद नियत रहता है। दिया है: $e^{-1} = 0.37$, जहाँ e मूल लघुगुणक का आधार है]




**उत्तर** (0.63)

**हल**




B = 1T, $\ell$ = 10 cm, v = 1 cm/s

$$\varepsilon = vB\ell = \frac{1}{100}\times 1\times\frac{1}{10} = 1\times10^{-3} \text{ वोल्ट}$$

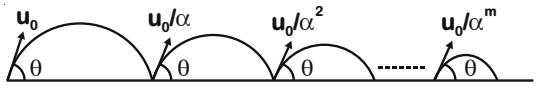
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1\times10^{-3}}{1} = 10^{-3} \text{ sec}$$

$$\therefore \quad i = I_0(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{10^{-3}}{1}(1-e^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad i = 10^{-3}(1 - 0.37) = 0.63 \text{ mA}$$

5. एक गेंद को प्रारंभिक चाल $\mu_0$ से क्षैतिज के साथ $\theta$ कोण पर धरातल से फेंका जाता है। परिणामी प्रक्षेप्य गति के लिए, जब गेंद पहली बार धरातल से टकराती है, तब इस बिंदु तक गेंद के औसत वेग का परिमाण $V_1$ है। धरातल से टकराने के बाद, गेंद समान कोण $\theta$ पर लेकिन $u_0/\alpha$ की घटती हुई चाल से प्रतिक्षिप्त होती है। यह गति चित्र में दर्शाये अनुसार लम्बे समय के लिए निरंतर चलती है। यदि गति की सम्पूर्ण अवधि के लिए गेंद के औसत वेग का परिमाण $0.8\ V_1$ है, तब $\alpha$ का मान _____ है।




**उत्तर** (4.00)

**हल** $$< V > = \frac{\Sigma R}{\Sigma T}$$

$$\Sigma R = \frac{2}{g}u_0^2(\sin\theta\cos\theta)\left[1+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^4}+\ldots\right]$$

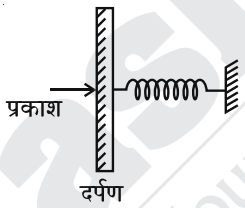
$$\Sigma T = \frac{2u_0}{g}\sin\theta\left[1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\ldots\right]$$

$$0.8\,V_1 = \frac{u_0\cos\theta\left[\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha^2}}\right]}{u_0\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}}$$

$\alpha = 4.00$

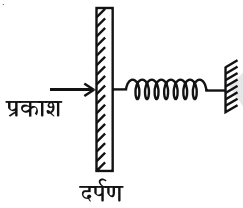
6. एक स्प्रिंग पर जुड़े द्रव्यमान **M** के एक पूर्णतः परावर्तक दर्पण में कोणीय आवृत्ति $\Omega$ का एक स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय इस प्रकार सम्मिलित है कि $\frac{4\pi M\Omega}{h} = 10^{24}\ m^{-2}$ तथा **h** प्लांक नियतांक है। तरंगदैर्ध्य $\lambda = 8\pi \times 10^{-6}$ **m** के **N** फोटॉन एक साथ अभिलम्ब आपतन पर इस प्रकार दर्पण से टकराते है कि दर्पण **1** $\mu$**m** तक विस्थापित हो जाता है । यदि **N** का मान $x \times 10^{12}$ है, तब **x** का मान _____ है

[माना स्प्रिंग द्रव्यमानहीन है]




**उत्तर (1.00)**

**हल**




दर्पण पर स्थानान्तरित संवेग

$$\Delta p = \frac{2Nh}{\lambda}$$

दिया है $\Omega = \frac{h\times 10^{24}}{4\pi m}$

इसलिए दर्पण द्वारा प्राप्त चाल

$$V_0 = \frac{2Nh}{\lambda M}$$

तथा चूंकि निकाय सरल आवर्त गति में दोलन करेगा।

$V_0 = A\Omega$ ($A = 1\ \mu m$)

$$\frac{2Nh}{\lambda M} = A\Omega \Rightarrow \frac{2Nh}{\lambda M} = \frac{A\cdot h\times 10^{24}}{4\pi M}$$

$$\Rightarrow N = \frac{10^{18}\times 8\pi\times 10^{-6}}{4\pi\times 2} = 1\times 10^{12}$$

$\therefore$ **x = 1**

## खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में दो (02) सूची-मिलान समुच्चय हैं।
- प्रत्येक सूची-मिलान समुच्चय में दो (02) बहुविकल्पी प्रश्न हैं।
- प्रत्येक सूची मिलान समुच्चय में दो सूचियाँ हैं: सूची-I तथा सूची-II.
- सूची-I में चार प्रविष्टियाँ हैं (I), (II), (III) तथा (IV) तथा सूची-II में छः प्रविष्टियाँ हैं (P), (Q), (R), (S), (T) तथा (U) .
- सूची-I तथा सूची-II के आधार पर प्रत्येक बहुविकल्पी प्रश्न में चार विकल्प दिये गये हैं तथा इन चार विकल्पों में से केवल एक बहुविकल्पी प्रश्न में पूछी गई स्थिति को सन्तुष्ट करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | +3 | यदि केवल सही संयोजन के संगत विकल्प का चयन किया गया है; |
| *शून्य अंक* | : | 0 | यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | –1 | अन्य सभी स्थितियों में। |

**1. अनुच्छेद में दी गई सूचना पर अधारित सूचियाँ का उपयुक्त रूप से मिलान कर निम्न के उत्तर दिजिए।**

एक संगीत वाद्यय यंत्र चार भिन्न-भिन्न धात्विक रस्सियों 1, 2, 3 तथा 4 के उपयोग से बनाया गया है। तथा रस्सियों का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान क्रमशः $\mu$, $2\mu$, $3\mu$ तथा $4\mu$ है। यंत्र को परास $L_0$ तथा $2L_0$ के मध्य में मुक्त लम्बाई के परिवर्तन के द्वारा रस्सियों को कम्पन्न करा कर बजाया जाता है। यह पाया जाता है कि रस्सी–1 ($\mu$) में मुक्त लम्बाई $L_0$ तथा तनाव $T_0$ पर मूल विधा की आवृत्ति $f_0$ है।

सूची-I में उपरोक्त चार रस्सियाँ दी गई है जबकि सूची-II में कुछ राशियों के परिमाण प्रदर्शित है।

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) रस्सी-1 ($\mu$) | (P) 1 |
| (II) रस्सी-2 ($2\mu$) | (Q) 1/2 |
| (III) रस्सी-3 ($3\mu$) | (R) $1/\sqrt{2}$ |
| (IV) रस्सी-4 ($4\mu$) | (S) $1/\sqrt{3}$ |
| | (T) 3/16 |
| | (U) 1/16 |

यदि प्रत्येक रस्सी में तनाव $T_0$ है, तब $f_0$ मात्रक में उच्चतम मूल आवृत्ति के लिए सही मिलान होगा।

(A) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ R, III $\rightarrow$ S, IV $\rightarrow$ Q

(B) I $\rightarrow$ Q, II $\rightarrow$ P, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ T

(C) I $\rightarrow$ Q, II $\rightarrow$ S, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ P

(D) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ T, IV $\rightarrow$ S

**उत्तर (A)**

**हल** (1) $f_0 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

(2) $f_1 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_0}{2\mu}}$

(3) $f_2 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_0}{3\mu}}$

(4) $f_3 = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_0}{4\mu}}$

जब लम्बाई $L_0$ है, तब सभी उच्चतम मूलभूत आवृत्तियों के लिए

2. **अनुच्छेद में दी गई सूचना पर अधारित सूचियाँ का उपयुक्त रूप से मिलान कर निम्न के उत्तर दिजिए।**

एक संगीत वाद्यय यंत्र चार भिन्न-भिन्न धात्विक रस्सियों 1, 2, 3 तथा 4 के उपयोग से बनाया गया है। तथा रस्सियों का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान क्रमश: $\mu$, $2\mu$, $3\mu$ तथा $4\mu$ है। यंत्र को परास $L_0$ तथा $2L_0$ के मध्य में मुक्त लम्बाई के परिवर्तन के द्वारा रस्सियों को कम्पन्न करा कर बजाया जाता है। यह पाया जाता है कि रस्सी–1 ($\mu$) में मुक्त लम्बाई $L_0$ तथा तनाव $T_0$ पर मूल विधा की आवृत्ति $f_0$ है।

सूची-I में उपरोक्त चार रस्सियाँ दी गई है जबकि सूची-II में कुछ राशियों के परिमाण प्रदर्शित है।

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) रस्सी-1 ($\mu$) | (P) 1 |
| (II) रस्सी-2 ($2\mu$) | (Q) 1/2 |
| (III) रस्सी-3 ($3\mu$) | (R) $1/\sqrt{2}$ |
| (IV) रस्सी-4 ($4\mu$) | (S) $1/\sqrt{3}$ |
| | (T) 3/16 |
| | (U) 1/16 |

रस्सियों 1, 2, 3 तथा 4 की लम्बाई क्रमश: $L_0, \frac{3L_0}{2}, \frac{5L_0}{4}$ तथा $\frac{7L_0}{4}$ पर नियत रखी गई है। रस्सिया 1, 2, 3 तथा 4 क्रमश: अपनी $1^{st}$, $3^{rd}$, $5^{th}$, तथा $14^{th}$ सन्नादियों पर इस प्रकार कम्पन्न करती है कि सभी रस्सियों की आवृत्ति समान होती है। तब $T_0$ की मात्रकों में चारों रस्सियों में तनाव के लिए सही मिलान होगा

(A) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ T
(B) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ T, IV $\rightarrow$ U
(C) I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ R, III $\rightarrow$ T, IV $\rightarrow$ U
(D) I $\rightarrow$ T, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ R, IV $\rightarrow$ U

**उत्तर (B)**

**हल** (1) $f_0 = \frac{1}{2L_0}\times\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$

(2) $f_0 = \frac{3\times2}{2\times3L_0}\sqrt{\frac{T_2}{2\mu}} \Rightarrow T_2 = \frac{T_0}{2}$

(3) $f_0 = \frac{5\times2}{5L_0}\sqrt{\frac{T_3}{3\mu}} \Rightarrow T_3 = \frac{3T_0}{16}$

(4) $f_0 = \frac{14\times4}{2\times7L_0}\sqrt{\frac{T_4}{4\mu}} \Rightarrow T_4 = \frac{T_0}{16}$

I $\rightarrow$ P, II $\rightarrow$ Q, III $\rightarrow$ T, IV $\rightarrow$ U

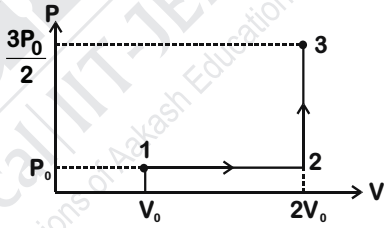
3. **अनुच्छेद में दी गई सूचना पर अधारित सूचियाँ का उपयुक्त रूप से मिलान कर निम्न के उत्तर दिजिए।**

एक आदर्श एकलपरमाणुक गैस पर एक ऊष्मागतिक प्रक्रम में, गैस द्वारा अवशोषित अत्यधिक अल्प ऊष्मा को $T\Delta X$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ T निकाय का ताप है तथा $\Delta X$ निकाय की ऊष्मागतिक राशि X में अल्प परिवर्तन है। एक मोल एकलपरमाणुक आदर्श गैस के लिए $X = \frac{3}{2}R\ln\left(\frac{T}{T_A}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_A}\right)$, यहाँ R गैस नियतांक है, V गैस का आयतन है, $T_A$ तथा $V_A$ नियतांक है।

नीचे सूची-I में प्रक्रम में सम्मिलित कुछ राशियाँ दर्शाई गई है तथा सूची-II में इन राशियों के कुछ सम्भव मान प्रदर्शित किये गए है

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में निकाय द्वारा किया गया कार्य | (P) $\frac{1}{3}RT_0 \ln 2$ |
| (II) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन | (Q) $\frac{1}{3}RT_0$ |
| (III) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा | (R) $RT_0$ |
| (IV) प्रक्रम $1 \to 2$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा | (S) $\frac{4}{3}RT_0$ |
| | (T) $\frac{1}{3}RT_0(3+\ln 2)$ |
| | (U) $\frac{5}{6}RT_0$ |

यदि PV-आरेख में दर्शाये अनुसार प्रक्रम एक मोल एकलपरमाणुक आदर्श गैस पर सम्पन्न होता है तथा $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$, सही मिलान है




(A) $I \to Q, II \to R, III \to S, IV \to U$
(B) $I \to Q, II \to S, III \to R, IV \to U$
(C) $I \to S, II \to R, III \to Q, IV \to T$
(D) $I \to Q, II \to R, III \to P, IV \to U$

**उत्तर (A)**

**हल** (I) $W_{1-2-3} = P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$

(II) $\Delta U = \frac{3}{2} \times \left[\frac{3P_0}{2} \times 2V_0 - P_0V_0\right] = RT_0$

(III) $\Delta Q = \Delta U + W$

$= \frac{4}{3}RT_0$

(IV) $\Delta Q = \frac{1}{3}RT_0 + \frac{3}{2} \times (2P_0V_0 - P_0V_0)$

$= \frac{5}{6}RT_0$

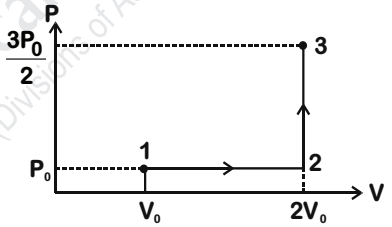
4. **अनुच्छेद में दी गई सूचना पर अधारित सूचियाँ का उपयुक्त रूप से मिलान कर निम्न के उत्तर दिजिए।**

एक आदर्श एकलपरमाणुक गैस पर एक ऊष्मागतिक प्रक्रम में, गैस द्वारा अवशोषित अत्यधिक अल्प ऊष्मा को $T\Delta X$ द्वारा दिया जाता है, जहाँ $T$ निकाय का ताप है तथा $\Delta X$ निकाय की ऊष्मागतिक राशि $X$ में अल्प परिवर्तन है। एक मोल एकलपरमाणुक आदर्श गैस के लिए $X = \frac{3}{2}R\ln\left(\frac{T}{T_A}\right) + R\ln\left(\frac{V}{V_A}\right)$, यहाँ $R$ गैस नियतांक है, $V$ गैस का आयतन है, $T_A$ तथा $V_A$ नियतांक है।

नीचे सूची-I में प्रक्रम में सम्मिलित कुछ राशियाँ दर्शाई गई है तथा सूची-II में इन राशियों के कुछ सम्भव मान प्रदर्शित किये गए है।

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में निकाय द्वारा किया गया कार्य | (P) $\frac{1}{3}RT_0\ln 2$ |
| (II) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन | (Q) $\frac{1}{3}RT_0$ |
| (III) प्रक्रम $1 \to 2 \to 3$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा | (R) $RT_0$ |
| (IV) प्रक्रम $1 \to 2$ में निकाय द्वारा अवशोषित ऊष्मा | (S) $\frac{4}{3}RT_0$ |
| | (T) $\frac{1}{3}RT_0(3+\ln 2)$ |
| | (U) $\frac{5}{6}RT_0$ |

यदि TV-आरेख में दर्शाये अनुसार प्रक्रम एक मोल एकलपरमाणुक आदर्श गैस पर सम्पन्न होता है तथा $P_0V_0 = \frac{1}{3}RT_0$, सही मिलान है।




(A) $I \to P, II \to T, III \to Q, IV \to T$ (B) $I \to P, II \to R, III \to T, IV \to P$

(C) $I \to S, II \to T, III \to Q, IV \to U$ (D) $I \to P, II \to R, III \to T, IV \to S$

**उत्तर (B)**

**हल** (I) $W_{1-2-3} = \frac{RT_0}{3}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + 0 = \frac{RT_0}{3}\ln 2$

(II) $\Delta U = \frac{3}{2}R\left(T_0 - \frac{T_0}{3}\right) = RT_0$

(III) $\Delta Q = \frac{RT_0}{3}\ln 2 + RT_0$

(IV) $\Delta Q = \frac{RT_0}{3}\ln(2)$

$I \to P, II \to R, III \to T, IV \to P$

# PART-II : CHEMISTRY

## खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 32)

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | **+4** | यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | **+3** | यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | **+2** | यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो; |
| *आंशिक अंक* | : | **+1** | यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो; |
| *शून्य अंक* | : | **0** | यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | **–1** | सभी अन्य स्थितियों में। |

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित **(A), (B)** तथा **(D)** एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

  केवल **(A), (B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+4** अंक प्राप्त होंगे;

  केवल **(A)** व **(B)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

  केवल **(A)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

  केवल **(B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

  केवल **(A)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

  केवल **(B)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

  केवल **(D)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

  किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) **0** अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर **–1** अंक प्राप्त होगा।

---

1. हाइड्रोजन परमाणु की आद्यावस्था ऊर्जा **–13.6 eV** है। $He^+$ की इलेक्ट्रॉनीय अवस्था $\psi$ पर विचार कीजिए जिसकी ऊर्जा, द्विगंशी क्वान्टम संख्या तथा चुम्बकीय क्वान्टम संख्या क्रमशः **–3.4 eV, 2** तथा **0** है। अवस्था $\psi$ के लिए निम्न में से कौन से कथन सही है (हैं)?

   **(A)** यह एक **4d** अवस्था है

   **(B)** इस अवस्था में इलेक्ट्रॉन द्वारा अनुभव किया गया नाभिकीय आवेश **2e** से कम है, जहाँ **e** इलेक्ट्रॉनीय आवेश का परिमाण है

   **(C)** इसमें **2** कोणीय नोड है

   **(D)** इसमें **3** त्रिज्यीय नोड हैं

**उत्तर (A, C)**

**हल** $E_n = -13.6 \times \frac{Z^2}{n^2} eV$

$\therefore \quad 3.4\ eV = -13.6 \times \frac{2^2}{n^2}$

$\Rightarrow \quad n = 4$

$n = 4, l = 2, m = 0$, 4d कक्षक से सम्बन्धित है

एक कक्षक में कोणीय नोड की संख्या = l का मान

4d में त्रिज्यीय नोड की संख्या = 1

क्योंकि यह एक एकक इलेक्ट्रॉनीय स्पीशीज है, इसमें परिरक्षण नहीं है तथा अनुभव नाभिकीय आवेश 2e होगा।

2. नीचे दी गयी अभिक्रियाओं (असन्तुलित) पर विचार कीजिए

$Zn$ + गर्म सान्द्र $H_2SO_4 \longrightarrow G + R + X$

$Zn$ + सान्द्र $NaOH \longrightarrow T + Q$

$G + H_2S + NH_4OH \longrightarrow Z$ (एक अवक्षेप) $+ X + Y$

सही विकल्प का चयन कीजिए

(A) Z गंदला सफेद अवक्षेप है

(B) Q की आद्यावस्था में इसका बंध क्रम 1 है

(C) R एक V-आकृति वाला अणु है

(D) T में Zn की ऑक्सीकरण अवस्था + 1 है

**उत्तर** (A, B, C)

**हल**

$$Zn + \underset{\text{conc.}}{H_2SO_4} \longrightarrow \underset{(G)}{ZnSO_4} + \underset{(R)}{SO_2} + \underset{(X)}{H_2O}$$

$$Zn + \underset{\text{conc.}}{NaOH} \longrightarrow \underset{(T)}{Na_2[ZnO_2]} + \underset{(Q)}{H_2}$$

$$\underset{(G)}{ZnSO_4} + \underbrace{H_2S + NH_4OH}_{\text{group-IV reagent}} \longrightarrow \underset{(Z)}{ZnS\downarrow} + \underset{(Y)}{(NH_4)_2SO_4} + \underset{(X)}{H_2O}$$

$SO_2$ (R) की V-आकृति है।

ZnS (Z) गंदला सफेद जिलेटिनी अवक्षेप है।

$H_2$ (Q) में बंध क्रम 1 है।

3. गोल्ड के निष्कर्षण के सायनाइड प्रक्रम में इसके अयस्क को जल में Q की उपस्थिति में $CN^-$ के साथ विक्षालन किया जाता है। इसके बाद R को T के साथ उपचारित करके Au तथा Z प्राप्त किया जाता है। सही विकल्प का चयन कीजिए।

(A) Q, $O_2$ है (B) R, $[Au(CN)_4]^-$ है

(C) Z, $[Zn(CN)_4]^{2-}$ है (D) T, Zn है

**उत्तर** (A, C, D)

**हल** गोल्ड का निष्कर्षण वायु ($O_2$) की उपस्थिति में NaCN के तनु विलयन के साथ विक्षालन द्वारा किया जाता है।

$$\underset{}{Au} + NaCN + \underset{(Q)}{O_2} \longrightarrow \underset{(R)}{[Au(CN)_2]^-} + OH^-$$

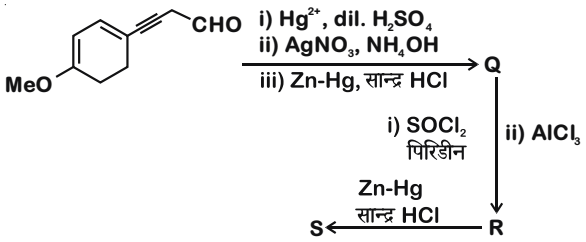
$$\underset{(R)}{[Au(CN)_2]^-} + \underset{(T)}{Zn} \longrightarrow \underset{(Z)}{[Zn(CN)_4]^{2-}} + \underset{(S)}{Au}$$

R; $[Au(CN)_2]^-$ है।

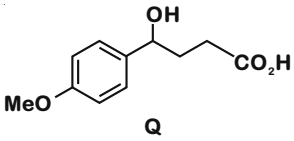
Q; $O_2$ है।

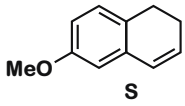
Z; $[Zn(CN)_4]^{2-}$ है

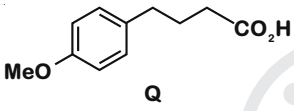
4. नीचे दिये गये अभिक्रिया अनुक्रम के लिए सही विकल्प का चयन कीजिए।

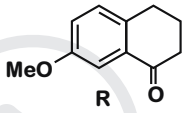


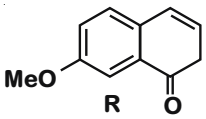

Q, R तथा S को मुख्य उत्पाद मानिए।

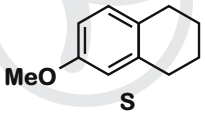
(A) 

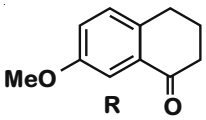


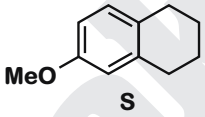

(B) 




(C) 

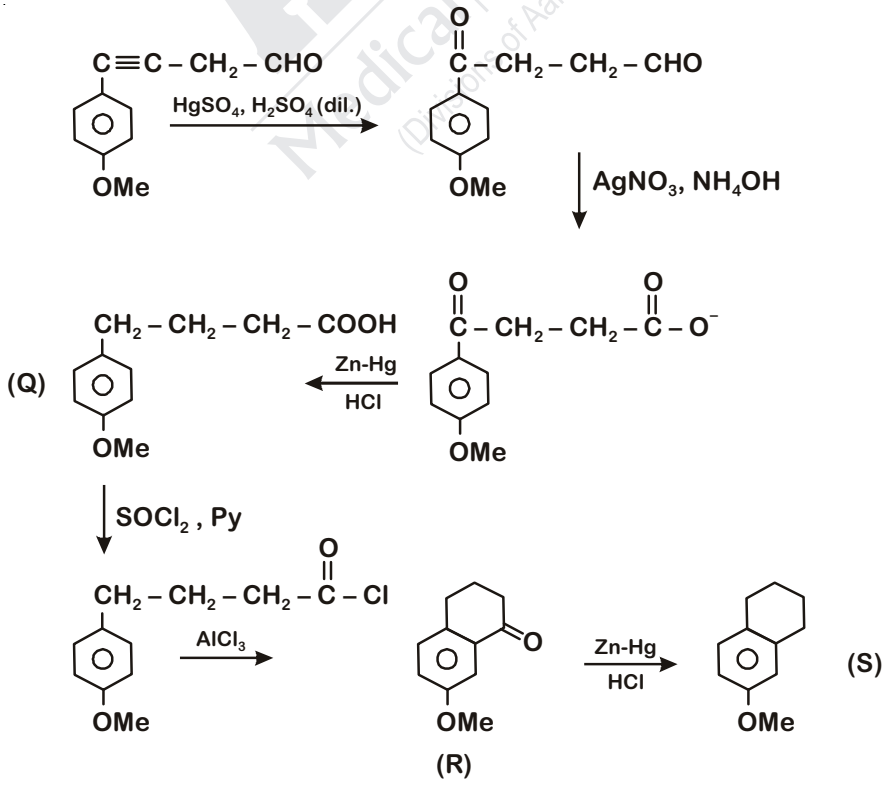



(D) 




**उत्तर (B, D)**

**हल**



5. निम्न में से सही विकल्प का चयन कीजिए

(A) नायलॉन-6 में ऐमाइड बन्धन है।

(B) टेफ्लॉन को उच्च दाब पर परसल्फेट उत्प्रेरक की उपस्थिति में टेट्राफ्लुओरोएथीन को गर्म करके बनाया जाता है।

(C) सैलुलोस में केवल $\alpha$-D-ग्लूकोस इकाईयाँ होती हैं जो ग्लाइकोसाइडिक आबंध द्वारा जुड़ी होती हैं।

(D) प्राकृतिक रबर विपक्ष एल्कीन इकाई युक्त पॉलिआइसोप्रीन होता है।

**उत्तर (A, B)**

**हल** (A) नायलॉन-6 एक पॉलिएमाइड है जो 533-543 K पर कैप्रोलेक्टम को जल के साथ गर्म करने पर बनता है।

(B) टेफ्लॉन पॉलिटेट्राफ्लुओरोएथीन है जो एक योगात्मक बहुलक है तथा यह परसल्फेट द्वारा उत्प्रेरित होता है।

(C) सैलुलोज $\beta$-D-ग्लूकोस इकाईयों से बनता है जो $C_1$ — $C_4$ ग्लाइकोसाइडिक बंधन द्वारा जुड़ी होती हैं।

(D) प्राकृतिक रबर समपक्ष-पॉलिआइसोप्रीन है।

6. ऐक्वा रेजिया के संदर्भ में सही विकल्प का चयन कीजिए

(A) ऐक्वा रेजिया का पीला रंग NOCl तथा $Cl_2$ की उपस्थिति के कारण होता है

(B) ऐक्वा रेजिया का विरचन सान्द्र HCl व सान्द्र $HNO_3$ को 3 : 1 (v/v) अनुपात में मिलाकर किया जाता है

(C) गोल्ड व ऐक्वा रेजिया की अभिक्रिया पर एक ऋणायन प्राप्त होता है जिसमें Au, +3 ऑक्सीकरण अवस्था में होता है

(D) वायु की अनुपस्थिति में गोल्ड व ऐक्वा रेजिया की क्रिया पर $NO_2$ प्राप्त होता है

**उत्तर (A, B, C)**

**हल** (A) $HNO_3 + 3HCl \longrightarrow NOCl + Cl_2 + 2H_2O$

नाइट्रोसिल क्लोराइड तथा क्लोरीन अम्लराज को पीला रंग प्रदान करते हैं।

(B) ऐक्वा रेजिया सांद्र HCl तथा सांद्र $HNO_3$ का 3 : 1 मिश्रण होता है।

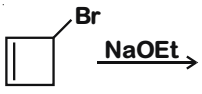
(C) गोल्ड ऐक्वा रेजिया में घुलकर $[AuCl_4]^-$ बनाता है।

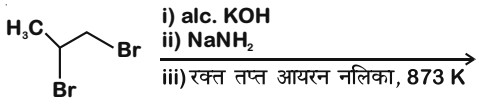
$$Au + 4H^+ + NO_3^- + 4Cl^- \longrightarrow [AuCl_4]^- + NO + 2H_2O$$

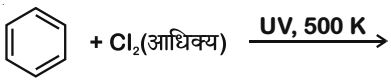
(D) वायु NO को $NO_2$ में ऑक्सीकृत कर देती है।

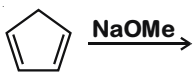
अतः वायु की अनुपस्थिति में $NO_2$ निर्माण की संभावना कम होती है।

7. उस सही विकल्प का चयन कीजिए जिसमें मुख्य उत्पाद के रूप में ऐरोमेटिक यौगिक प्राप्त होता है

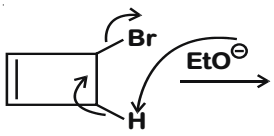
(A) 


(B) 

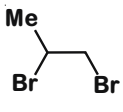

(C) 


(D) 


**उत्तर (B, D)**

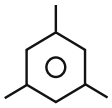
**हल** (A) 

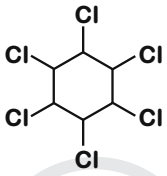
(प्रतिएरोमेटिक)

(B) 

$\xrightarrow[\text{(ii) } NaNH_2]{\text{(i) Alc. KOH}}$ Me — C ≡ CH

↓ रक्त तप्त Fe नलिका, 873 K

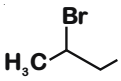


(C) + $3Cl_2$ $\xrightarrow[500\ K]{UV}$ 

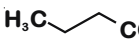

(D)

+ MeOH

8. निम्न में से कौनसी अभिक्रिया में मुख्य उत्पाद के रूप में प्रोपेन प्राप्त होता है?

(A) 

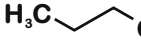
$\xrightarrow{Zn}$

(B) 

$\xrightarrow{NaOH,\ CaO,\ \Delta}$

(C)

$\xrightarrow{Zn,\ dil.\ HCl}$

(D) 

$\xrightarrow{\text{विद्युतअपघटन}}$

**उत्तर** (B, C)

**हल** (A)

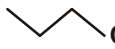
$\xrightarrow{Zn}$ $CH_3—CH=CH_2$

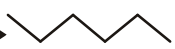
(B)

$\xrightarrow[\Delta]{NaOH–CaO}$

(C)

$\xrightarrow[H^+]{Zn}$

(D) 2 

$\xrightarrow{Electrolysis}$  + $2CO_2$ + $H_2$ + 2NaOH

## खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 18)

- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

*पूर्ण अंक* : +3 यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

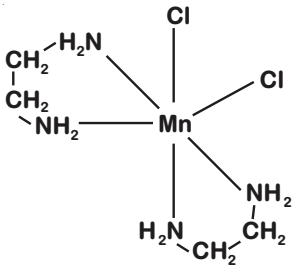
*शून्य अंक* : 0 अन्य सभी स्थितियों में।

1. समपक्ष-$[Mn(en)_2Cl_2]$ संकुल के एक अणु में उपस्थित समपक्ष N–Mn–Cl बंध कोण (जहाँ Mn–N तथा Mn–Cl बंध समपक्ष स्थितियों पर हैं) की कुल संख्या है _____

(en = $NH_2CH_2CH_2NH_2$)

**उत्तर** (6)

**हल** समपक्ष-$[Mn(en)_2Cl_2]$




N-Mn-Cl बंधों (जिनमें N-Mn बंध तथा Mn-Cl बंध समपक्ष में है) की संख्या = 6

(दो N-Mn-Cl बंध में N-Mn बंध Mn-Cl बंध के विपक्ष में होता है)

2. 1 मोल विषमलम्बाक्ष सल्फर का सान्द्र $HNO_3$ द्वारा उस यौगिक में ऑक्सीकरण पर जिसमें सल्फर की ऑक्सीकरण अवस्था उच्चतम है, में प्राप्त जल की मात्रा (g में) है ___

(दिया गया आँकड़ा : जल का मोलर द्रव्यमान = 18 g $mol^{-1}$)

**उत्तर** (288)

**हल** सांद्र $HNO_3$ विषम लम्बाक्ष सल्फर ($S_8$) को $H_2SO_4$ में ऑक्सीकृत कर देता है तथा स्वयं $NO_2$ में अपचयित हो जाता है।

$$\overset{0}{S_8} + 48\overset{+5}{H}NO_3 \rightarrow 8H_2\overset{+6}{S}O_4 + 48\overset{+4}{N}O_2 + 16H_2O$$

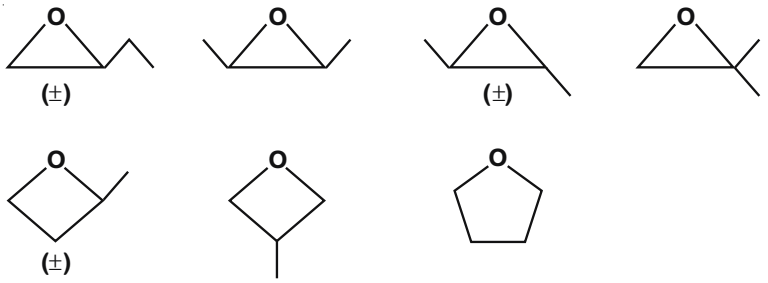
1 मोल $S_8$ से 16 मोल $H_2O$ बनता है।

$H_2O$ का द्रव्यमान = 16 × 18 = 288 gm

3. अणुसूत्र $C_4H_8O$ वाले चक्रीय ईथर के संरचनात्मक तथा त्रिविमसमावयव दोनों सहित समावयवियों की कुल संख्या है ____

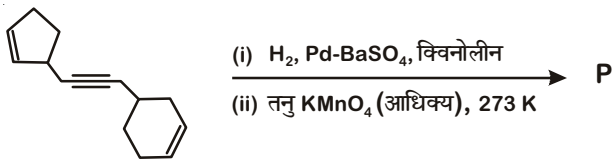
**उत्तर** (10)

**हल** सूत्र $C_4H_8O$ के त्रिविम समावयवियों सहित चक्रिय ईथर निम्न है:



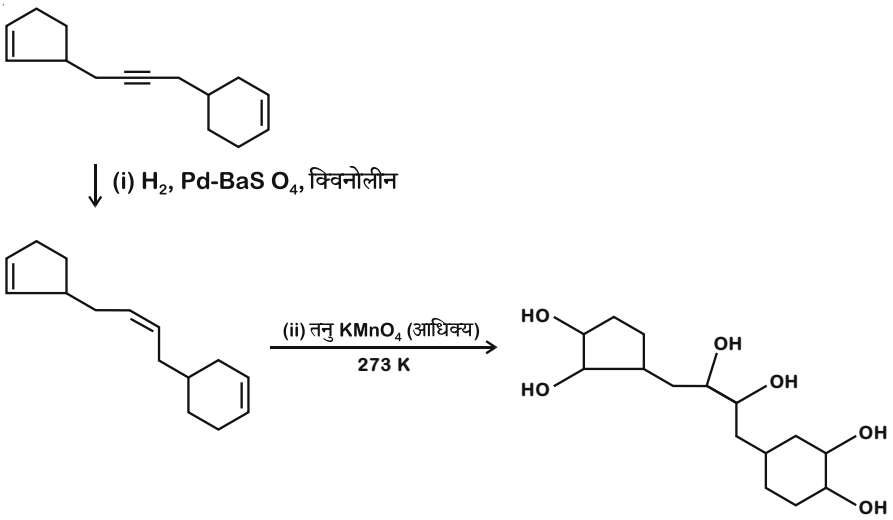

चक्रिय ईथरों की कुल संख्या = 10

4. मुख्य उत्पाद P के एक अणु में उपस्थित हाइड्रॉक्सिल समूहों की कुल संख्या है ____




**उत्तर** (6)

**हल**




5. एक बंद सिलेण्डर में 1 atm प्रारम्भिक दाब तथा समतापीय, समआयतनी परिस्थितियों में अपघटन अभिक्रिया $2N_2O_5(g) \xrightarrow{\Delta} 2N_2O_4(g) + O_2(g)$ प्रारम्भ की जाती है। $Y \times 10^3$ s के बाद सिलेण्डर के अन्दर दाब 1.45 atm है। आदर्श व्यवहार मानते हुए, यदि अभिक्रिया का वेग नियतांक $5 \times 10^{-4}\ s^{-1}$ हो, तो Y का मान है _____

**उत्तर** (2.3)

**हल**

$$2N_2O_5 \xrightarrow{\Delta} 2N_2O_4 + O_2 ; K = 5\times10^{-4}\ sec^{-1}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| प्रारम्भिक दाब (atm में) | 1 | – | – |
| समय t सेकण्ड बाद दाब | 1 – 2x | 2x | x |

$\therefore$ $1 - 2x + 2x + x = 1.45$ atm

$\Rightarrow$ $x = 0.45$ atm

प्रथम कोटि की अभिक्रिया के लिए (अभिक्रिया रससमीकरणमिति को ध्यान में रखते हुए)

$$2Kt = \ln\frac{a_0}{a_0 - x}$$

$\because$ $a_0 \propto 1$ तथा $a_0 - x \propto 0.1$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{2\times5\times10^{-4}}\ln\frac{1}{0.1} = 2.3\times10^3\ sec$$

6. 900 g जल युक्त यूरिया के जलीय विलयन में यूरिया का मोल प्रभाज 0.05 है। यदि विलयन का घनत्व 1.2 g $cm^{-3}$ हो, तो यूरिया विलयन की मोलरता है _____

(दिया गये आँकड़े : यूरिया तथा जल के मोलर द्रव्यमान क्रमशः 60 g $mol^{-1}$ तथा 18 g $mol^{-1}$ हैं)

**उत्तर** (2.98)

**हल**

$$\chi_{\text{यूरिया}} = 0.05 = \frac{n_{\text{यूरिया}}}{n_{\text{जल}} + n_{\text{यूरिया}}}$$

$$0.05 = \frac{n_{\text{यूरिया}}}{\frac{900}{18} + n_{\text{यूरिया}}}$$

$\Rightarrow$ $n_{\text{यूरिया}} = 2.63$ mol

यूरिया का द्रव्यमान = 2.63 × 60 g/mol = 157.8 g

मोलर द्रव्यमान (यूरिया) = 60 g/mol

विलयन का द्रव्यमान = 157.8 + 900 = 1057.8 g

विलयन का आयतन = $\frac{1057.8}{1.2}$ = 881.5 ml

विलयन की मोलरता = $\frac{2.63}{881.5} \times 1000$ = 2.98 M

## खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में दो (02) सूची-मिलान समुच्चय हैं।
- प्रत्येक सूची-मिलान समुच्चय में दो (02) बहुविकल्पी प्रश्न हैं।
- प्रत्येक सूची मिलान समुच्चय में दो सूचियाँ हैं: सूची-I तथा सूची-II.
- सूची-I में चार प्रविष्टियाँ हैं (I), (II), (III) तथा (IV) तथा सूची-II में छः प्रविष्टियाँ हैं (P), (Q), (R), (S), (T) तथा (U) .
- सूची-I तथा सूची-II के आधार पर प्रत्येक बहुविकल्पी प्रश्न में चार विकल्प दिये गये हैं तथा इन चार विकल्पों में से केवल एक बहुविकल्पी प्रश्न में पूछी गई स्थिति को सन्तुष्ट करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | +3 | यदि केवल सही संयोजन के संगत विकल्प का चयन किया गया है; |
| *शून्य अंक* | : | 0 | यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | –1 | अन्य सभी स्थितियों में। |

1. नीचे दिये गये अनुच्छेद में दी गयी सूचना के आधार पर सूचियों को उचित रूप से मिलान करके निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

एक इलेक्ट्रॉन वाले परमाणु के बोहर मॉडल पर विचार कीजिए जहाँ इलेक्ट्रॉन नाभिक के चारों ओर गति करता है। नीचे दी गयी सूची-I में परमाणु की $n^{th}$ कक्षा के लिए कुछ राशियाँ दी गयी हैं तथा सूची-II में n पर इनकी निर्भरता दर्शाने वाले विकल्प दिये गये हैं।

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) $n^{th}$ कक्षा की त्रिज्या | (P) $\propto n^{-2}$ |
| (II) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग | (Q) $\propto n^{-1}$ |
| (III) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा | (R) $\propto n^{0}$ |
| (IV) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा | (S) $\propto n^{1}$ |
| | (T) $\propto n^{2}$ |
| | (U) $\propto n^{1/2}$ |

सूची-I तथा सूची-II पर विचार करते हुए सही समुच्चय वाला विकल्प कौनसा है?

(A) (III), (P) (B) (IV), (U)

(C) (III), (S) (D) (IV), (Q)

**उत्तर (A)**

**हल** गतिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{n^2}$

स्थितिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{n^2}$

$\therefore$ सही मिलान : **(III), P ; (IV), P**

**2.** नीचे दिये गये अनुच्छेद में दी गयी सूचना के आधार पर सूचियों को उचित रूप से मिलान करके निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

एक इलेक्ट्रॉन वाले परमाणु के बोहर मॉडल पर विचार कीजिए जहाँ इलेक्ट्रॉन नाभिक के चारों ओर गति करता है। नीचे दी गयी सूची-I में परमाणु की $n^{th}$ कक्षा के लिए कुछ राशियाँ दी गयी हैं तथा सूची-II में n पर इनकी निर्भरता दर्शाने वाले विकल्प दिये गये हैं।

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) $n^{th}$ कक्षा की त्रिज्या | (P) $\propto n^{-2}$ |
| (II) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग | (Q) $\propto n^{-1}$ |
| (III) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा | (R) $\propto n^{0}$ |
| (IV) $n^{th}$ कक्षा में इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा | (S) $\propto n^{1}$ |
| | (T) $\propto n^{2}$ |
| | (U) $\propto n^{1/2}$ |

सूची-I तथा सूची-II पर विचार करते हुए सही समुच्चय वाला विकल्प कौनसा है?

(A) (II), (R)

(B) (I), (P)

(C) (II), (Q)

(D) (I), (T)

**उत्तर (D)**

**हल** बोहर मॉडल में

त्रिज्या $\propto n^2$

कोणीय संवेग $\propto n$

गतिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{n^2}$

स्थितिज ऊर्जा $\propto \frac{1}{n^2}$

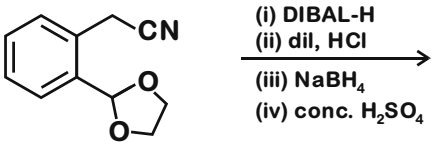
$\therefore$ सही मिलान : **(I), (T) ; (II), (S)**

3. नीचे दिये गये अनुच्छेद में दी गयी सूचना के आधार पर सूचियों को उचित रूप से मिलान करके निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

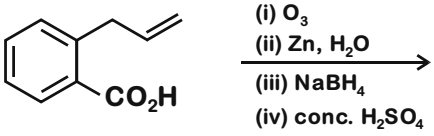
सूची-I में प्रारम्भिक पदार्थ तथा चयनित रासायनिक अभिक्रियाओं के अभिकर्मक दिये गये हैं। सूची-II में सूची-I की अभिक्रियाओं से मध्यवर्ती उत्पाद तथा/या अन्तिम उत्पाद के रूप में निर्मित होने वाले यौगिकों की संरचनाएं दी गयी हैं।

सूची-I

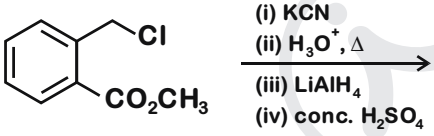
(I)



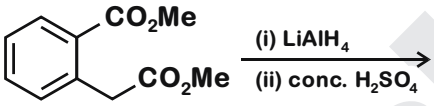

(II)




(III)

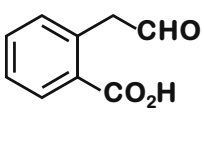



(IV)

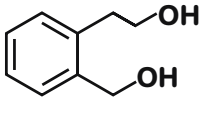



सूची-II

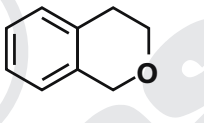
(P)



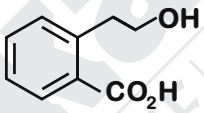

(Q)



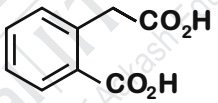

(R)



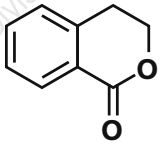

(S)




(T)




(U)



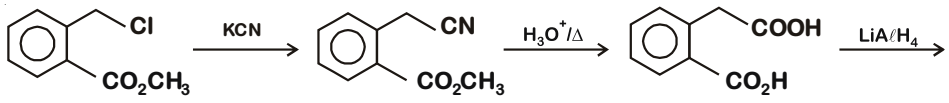

सूची-I तथा सूची-II पर विचार करते हुए सही समुच्चय वाला विकल्प कौनसा है?

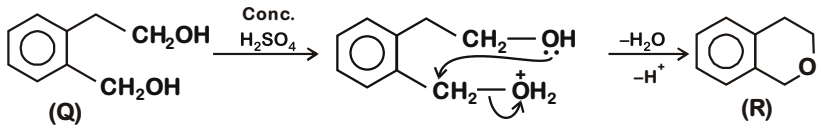
(A) (IV), (Q), (R)
(B) (III), (T), (U)
(C) (IV), (Q), (U)
(D) (III), (S), (R)

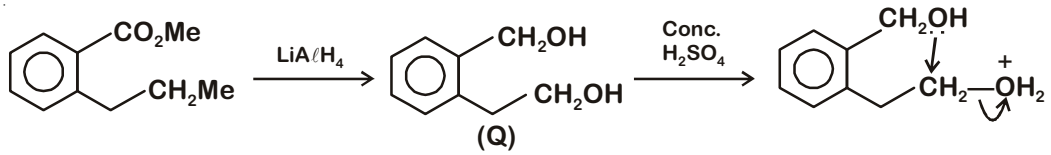
**उत्तर** (A)

**हल**

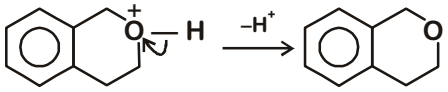
(III)



(IV) 


(Q)




(R)

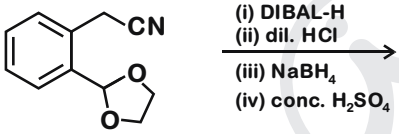
**(III), (Q), (R) ; (IV), (Q), (R)**

4. नीचे दिये गये अनुच्छेद में दी गयी सूचना के आधार पर सूचियों को उचित रूप से मिलान करके निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए

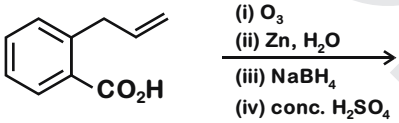
सूची-I में प्रारम्भिक पदार्थ तथा चयनित रासायनिक अभिक्रियाओं के अभिकर्मक दिये गये हैं। सूची-II में सूची-I की अभिक्रियाओं से मध्यवर्ती उत्पाद तथा/या अन्तिम उत्पाद के रूप में निर्मित होने वाले यौगिकों की संरचनाएं दी गयी हैं।

सूची-I

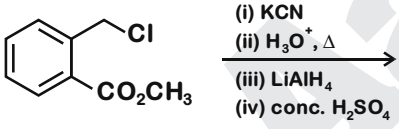
**(I)**



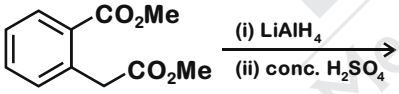

**(II)**




**(III)**

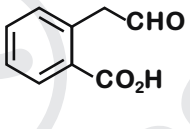



**(IV)**

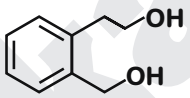



सूची-II

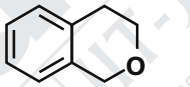
**(P)**



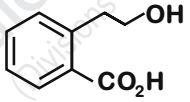

**(Q)**



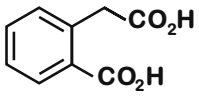

**(R)**



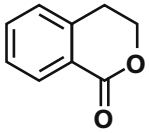

**(S)**




**(T)**




**(U)**




सूची-I तथा सूची-II पर विचार करते हुए सही समुच्चय वाला विकल्प कौनसा है?

(A) (I), (Q), (T), (U)

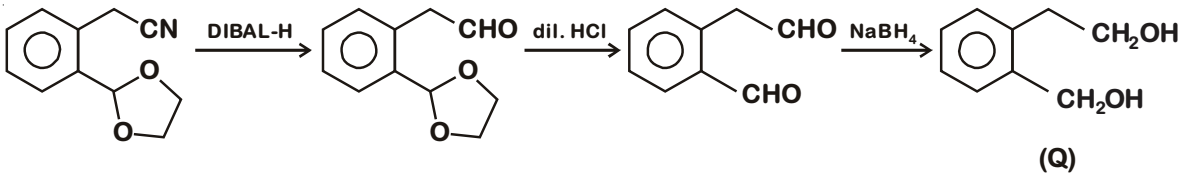
(B) (II), (P), (S), (U)

(C) (I), (S), (Q), (R)

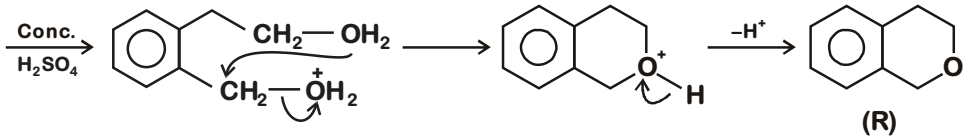
(D) (II), (P), (S), (T)

**उत्तर (B)**

**हल** (I)

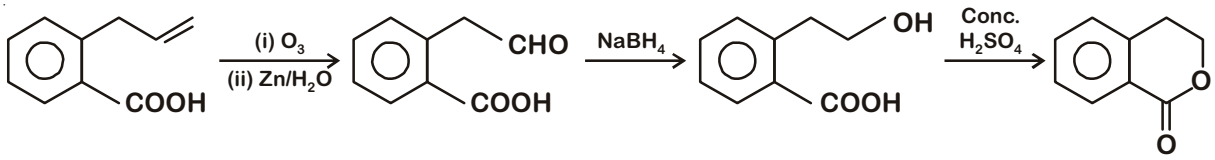



(Q)




(R)

(II)




(P) (S) (U)

(I), (Q), (R); (II), (P), (S), (U)

## PART-III : MATHEMATICS

### खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 32)

- इस खण्ड में आठ **(08)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के चार विकल्प हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक सही उत्तर है/हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए (सभी) सही उत्तरों से संबंधित विकल्प/विकल्पों का चयन कीजिये।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | **+4** | यदि केवल सभी सही विकल्प/विकल्पों का चयन किया गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | **+3** | यदि सभी चार विकल्प सही हैं परन्तु केवल तीन विकल्पों का चयन गया है; |
| *आंशिक अंक* | : | **+2** | यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल दो विकल्पों का चयन किया गया है तथा दोनों सही हो; |
| *आंशिक अंक* | : | **+1** | यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परन्तु केवल एक विकल्प का चयन किया गया है तथा वह सही विकल्प हो; |
| *शून्य अंक* | : | **0** | यदि किसी भी विकल्प का चयन नहीं किया गया (अर्थात् प्रश्न का उत्तर नहीं दिया गया हो); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | **–1** | सभी अन्य स्थितियों में। |

- उदाहरण के लिए एक प्रश्न में यदि सही उत्तरों से संबंधित **(A), (B)** तथा **(D)** एकमात्र तीन विकल्प हैं, तब

केवल **(A), (B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+4** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** व **(B)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(B)** व **(D)** का चयन किये जाने पर **+2** अंक प्राप्त होंगे;

केवल **(A)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

केवल **(B)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

केवल **(D)** का चयन किये जाने पर **+1** अंक प्राप्त होगा;

किसी भी विकल्प का चयन ना करने पर (अर्थात् प्रश्न का उत्तर न देने पर) **0** अंक प्राप्त होगा तथा विकल्पों के किसी अन्य समुच्चय का चयन किये जाने पर **–1** अंक प्राप्त होगा।

1. माना $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक फलन है, फलन f का

गुणधर्म 1 यदि $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{\sqrt{|h|}}$ विद्यमान है तथा परिमित है तथा

गुणधर्म 2 यदि $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h^2}$ विद्यमान है तथा परिमित है

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $f(x) = x^{2/3}$ का गुणधर्म 1 है

(B) $f(x) = |x|$ का गुणधर्म 1 है

(C) $f(x) = x|x|$ का गुणधर्म 2 है

(D) $f(x) = \sin x$ का गुणधर्म 2 है

**उत्तर (A, B)**

**हल**

(A) $f(x) = x^{2/3}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3}-0}{\sqrt{|h|}} = \lim_{h\to 0} |h|^{1/6} = 0$$

(B) $f(x) = |x|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|-0}{\sqrt{|h|}} = \lim_{h\to 0} \sqrt{|h|} = 0$$

(C) $f(x) = x|x|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(h)-0}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{यदि } h \to 0^+ \\ -1 & \text{यदि } h \to 0^- \end{cases}$$

इसलिए, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ विद्यमान नहीं है

(D) $f(x) = \sin x$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h-0}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\frac{\sin h}{h} = \text{विद्यमान नहीं है}$$

2. माना $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$ द्वारा परिभाषित है। फलन $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt,\ x > 0$ परिभाषित कीजिए

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $x = 2$ पर F का स्थानीय उच्चिष्ठ है

(B) $x = 1$ पर F का स्थानीय निम्निष्ठ है

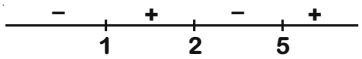
(C) सभी $x \in (0, 5)$ के लिए $F(x) \neq 0$

(D) $(0, \infty)$ में F के दो स्थानीय उच्चिष्ठ एवं एक स्थानीय निम्निष्ठ है

**उत्तर (A, B, C)**

**हल** $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$\Rightarrow$ $F'(x) = f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$



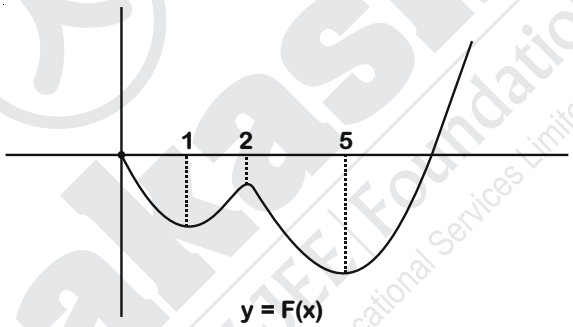

$F(x)$ का $x = 2$ पर उच्चिष्ठ तथा $x = 1$ व $x = 5$ पर निम्निष्ठ है

$$F(2) = \int_0^2 [x^3 - 8x^2 + 17x - 10]\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + \frac{17x^2}{2} - 10x\Big|_0^2$$

$$= 4 - \frac{64}{3} + 34 - 20$$

$$= 38 - \frac{124}{3} = -\frac{10}{3}$$

यदि $f(x)$ का अधिकतम मान ऋणात्मक है, तब किसी $x \in (0, 5)$ के लिए $f(x) \neq 0$,




3. माना $x \in \mathbb{R}$ तथा माना

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 6 \end{bmatrix}$$ तथा $R = PQP^{-1}$.

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $R = \det\begin{bmatrix} 2 & x & x \\ 0 & 4 & 0 \\ x & x & 5 \end{bmatrix} + 8$

(B) $x = 1$ के लिए एक इकाई सदिश $\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ विद्यमान है जिसके लिए $R\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(C) $x = 0$ के लिए यदि $R\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$, तब $a + b = 5$

(D) एक वास्तविक संख्या $x$ विद्यमान है जबकि $PQ = QP$

**उत्तर (A, C)**

**हल** $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$ तथा $Q=\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&6\end{bmatrix}$

इसलिए $6P^{-1}=\begin{bmatrix}6&-3&0\\0&3&-2\\0&0&2\end{bmatrix}$

(A) $\because\ R=PQP^{-1}$

$\Rightarrow \det(R)=\det(P)\cdot\det(Q)\cdot\det(P^{-1})$

$\Rightarrow \det(R)=\det(Q)=\det\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&6\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(R)=\det\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&5\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}2&x&0\\0&4&0\\x&x&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(R)=\det\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&5\end{bmatrix}+8$

(B) $R\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ में $(\alpha,\beta,\gamma)$ के अतुच्छ हल होंगे

इसलिए $\det(R)=0$

$\Rightarrow 4(12-x^2)=0$

$\Rightarrow x=\pm 2\sqrt{3}$

(C) $PQP^{-1}\begin{bmatrix}1\\a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6a\\6b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-3&0\\0&3&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6a\\6b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}12&6&4\\0&24&8\\0&0&36\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36\\36a\\36b\end{bmatrix}$

$\Rightarrow 12+6a+4b=36$ तथा $24a+8b=36a$

$\Rightarrow a=2$ तथा $b=3$

$\Rightarrow a+b=5$

(D) $PQ=QP$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&x&x\\0&4&0\\x&x&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

दोनों ओर x के किसी भी मान के लिए $a_{12}$ अवयव समान नहीं हैं, इसलिए x का कोई मान विद्यमान नहीं है जिसके लिए PQ = QP.

4. माना $f(x)=\frac{\sin \pi x}{x^2}$, $x > 0$.

माना $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < ...$, f के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु हैं तथा $y_1 < y_2 < y_3 < ... < y_n < ...$, f के सभी स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु है

तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $x_1 < y_1$

(B) n के प्रत्येक मान के लिए $x_{n+1} - x_n > 2$

(C) n के प्रत्येक मान के लिए $|x_n - y_n| > 1$

(D) n के प्रत्येक मान के लिए $x_n \in \left(2n, 2n+\frac{1}{2}\right)$

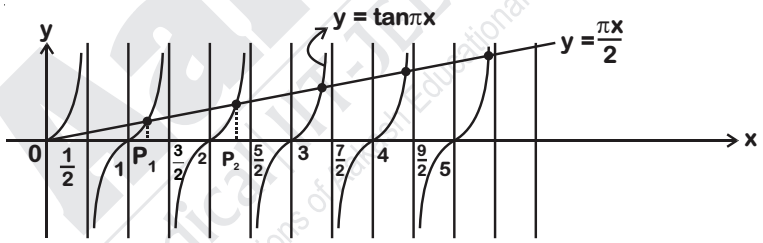
**उत्तर (B, C, D)**

**हल** $$f'(x)=\frac{2x\cos \pi x\left(\frac{\pi x}{2}-\tan \pi x\right)}{x^4}$$

उच्चिष्ठ/निम्निष्ठ के लिए $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \cos \pi x = 0$ या $\tan \pi x = \frac{\pi}{2}x$

$\because \cos \pi x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tan \pi x = \frac{\pi}{2}x$




$f'(P_1^-) < 0, f'(P_1^+) > 0 \quad \Rightarrow x = P_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु है

$f'(P_2^-) > 0, f'(P_2^+) < 0 \quad \Rightarrow x = P_2 \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$ स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु है

ग्राफ से यह स्पष्ट है कि $\frac{5}{2}-x_1 > \frac{9}{2}-x_2 > \frac{13}{2}-x_3 > \frac{17}{2}-x_4 ....$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n > 2 \ \forall \ n$

$\frac{3}{2}-y_1 > \frac{5}{2}-x_1 > \frac{7}{2}-y_2 > \frac{9}{2}-x_2 > ...$

$\Rightarrow |x_n - y_n| > 1 \ \forall \ n$

$\because \quad x_1 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), x_2 \in \left(4, \frac{9}{2}\right), x_3 \left(6, \frac{13}{2}\right)...$

$\Rightarrow x_n \in \left(2n, 2n+\frac{1}{2}\right) \forall \ n$

5. $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 1$ के लिए माना

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[2]{2}+\ldots+\sqrt[2]{n}}{n^{7/3}\left(\frac{1}{(an+1)^2}+\frac{1}{(an+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(an+n)^2}\right)}\right)=54.$$

तब a का/के संभव मान है/हैं

(A) 7 (B) –6

(C) 8 (D) –9

**उत्तर (C,D)**

**हल**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{r=1}^{n} r^{1/3}}{n^{7/3}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(na+r)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{r}{n}\right)^{1/3}\frac{1}{n}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\left(a+\frac{r}{n}\right)^2}\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{\int_0^1 x^{1/3}dx}{\int_0^1\frac{dy}{(x+a)^2}}=54$$

$$\Rightarrow \frac{3\frac{x^{4/3}}{4}\Big|_0^1}{\frac{-1}{(x+a)}\Big|_0^1}=54$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4\times 54}=\frac{1}{a}-\frac{1}{1+a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{72}$$

$$\Rightarrow a^2+a-72=(a+9)(a-8)=0$$

$$a=8 \text{ या } -9$$

6. अ-ऋणात्मक पूर्णांकों n के लिए, माना

$$f(n)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n}\sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)}$$

माना $\cos^{-1}x$ के मान $[0,\pi]$ में हैं, तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{1}{2}$

(B) $f(4) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sin(7\cos^{-1} f(5)) = 0$

(D) यदि $a = \tan(\cos^{-1} f(6))$, तब $a^2 + 2a - 1 = 0$

**उत्तर (B,C,D)**

**हल**

$$f(n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{k+2}{n+2}\pi\right)}{\sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(\frac{k+1}{n+2}\pi\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) - \cos\left(\frac{2k+3}{n+2}\pi\right)\right)}{\sum_{k=0}^{n}\left(1-\cos\left(\frac{2k+2}{n+2}\pi\right)\right)}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) - \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}\cos\left(\frac{n+3}{n+2}\pi\right)}{(n+1) - \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n+2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}\cos(\pi)}$$

$$\Rightarrow f(n) = \frac{(n+1)\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}{(n+1)+1} = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$$

(A) $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) = 1$

(B) $f(4) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $f(5) = \cos\frac{\pi}{7}$

इसलिए, $\sin\left(7\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)\right) = \sin\pi = 0$

(D) $\because f(6) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; तब $\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$

स्पष्टत: $\alpha^2 + 2\alpha = 1$

7. नीचे तीन रेखाएँ दी गई है

$L_1$ : $\vec{r} = \lambda\hat{i},\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$L_2$ : $\vec{r} = \hat{k} + \mu\hat{j},\ \mu \in \mathbb{R}$ तथा

$L_3$ : $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \nu\hat{k},\ \nu \in \mathbb{R}$

किन बिंदुओं के लिए Q, $L_2$ पर है? क्या हम $L_1$ पर एक बिंदु P तथा $L_3$ पर एक बिंदु R ज्ञात कर सकते हैं जबकि P, Q व R सरेखीय हैं?

(A) $\hat{k} + \hat{j}$ (B) $\hat{k}$

(C) $\hat{k} + \frac{1}{2}\hat{j}$ (D) $\hat{k} - \frac{1}{2}\hat{j}$

**उत्तर (C,D)**

**हल** माना $P \equiv (\lambda, 0, 0), Q(0, \mu, 1), R(1, 1, \nu)$

सरेखीयता के लिए $\overrightarrow{PQ} = k\,\overrightarrow{PR}$

$$\frac{\lambda - 0}{\lambda - 1} = \frac{0 - \mu}{0 - 1} = \frac{0 - 1}{0 - \nu}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\nu}, \quad \lambda = \lambda\mu - \mu$$

$$\Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{\mu}, \quad \lambda = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \neq 0, \quad \mu \neq 1$$

$$\Rightarrow \quad Q \neq \hat{k}, \quad Q \neq \hat{k} + \hat{j}$$

8. माना

$$P_1 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $X = \sum_{k=1}^{6} P_k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} P_k^T$

जहाँ $P_k^T$ मैट्रिक्स $P_k$ के परिवर्त मैट्रिक्स को दर्शाता है। तब निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं?

(A) X के विकर्ण अवयवों का योगफल 18 है

(B) यदि $X\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, तब $\alpha = 30$

(C) X एक सममित मैट्रिक्स है

(D) X – 30I एक प्रतिलीनीय मैट्रिक्स है

**उत्तर (A,B,C)**

**हल** $\because \quad P_1^T = P_1,\ P_2^T = P_2,\ P_3^T = P_3,\ P_4^T = P_5,\ P_5^T = P_4$ तथा $P_6^T = P_6$

$$X = \sum_{k=1}^{6} P_k \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} P_k^T;\ \text{माना} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = Q;\ \text{यहाँ } Q^T = Q$$

(A) $\text{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{6} \text{Tr}\left(P_i Q P_i^T\right)$ $(\because \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA))$

$= \sum_{i=1}^{6} \text{Tr}\left(Q P_i^T \cdot P_i\right)$ $(\because P_i\text{'s}$ लाम्बिक् मैट्रिक्स हैं)

$= \sum_{i=1}^{6} \text{Tr}(QI)$

$= \sum_{i=1}^{6} \text{Tr}(Q)$

$= 6 \cdot \text{Tr}(Q)$

$= 6 \times 3$

$= 18$

(B) माना $R = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, तब $XR = \sum_{i=1}^{6} P_i Q P_i^T \cdot R = \sum_{i=1}^{6} P_i Q R = \sum_{i=1}^{6} P_i \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 30 \end{bmatrix} = 30 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(C) $X = P_1 Q P_1 + P_2 Q P_2 + P_3 Q P_3 + P_4 Q P_5 + P_5 Q P_4 + P_6 Q P_6$

$X^T = P_1^T Q P_1^T + P_2^T Q P_2^T + P_3^T Q P_3^T + P_5^T Q P_4^T + P_4^T Q P_5^T + P_6^T Q P_6^T$

$X^T = P_1 Q P_1 + P_2 Q P_2 + P_3 Q P_3 + P_4 Q P_5 + P_5 Q P_4 + P_6 Q P_6 = X$

इसलिए $X$ सममित मैट्रिक्स है।

(D) $X \cdot R = 30\ R$

$\Rightarrow \quad (X - 30I)R = O$

अतः $|X - 30I| = 0$

अतः $X - 30I$ प्रतिलोमीय नहीं है

## खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 18)

- इस खण्ड में छः **(06)** प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक आंकिक मान है
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर के सही आंकिक मान को माऊस तथा ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमैरिक की-पैड के उपयोग से उत्तर प्रविष्ट करने के स्थान पर ही प्रविष्ट कीजिये। यदि आंकिक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हो, तो प्राप्त मान का दो दशमलव बिन्दु तक सन्निकटन करें।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जायेगा:

*पूर्ण अंक* : **+3** यदि केवल सही आंकिक मान को प्रविष्ट किया गया है;

*शून्य अंक* : **0** अन्य सभी स्थितियों में।

1. माना (X) समुच्चय X में अवयवों की संख्या को दर्शाता है। माना S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} एक प्रतिदर्श समष्टि है, जहाँ प्रत्येक अवयव समान संख्या में है। यदि A व B स्वतंत्र घटनाएँ हैं जो S से सम्बद्ध हैं, तब क्रमित युग्मों (A, B) की संख्या क्या होगी जबकि $1 \le |B| < |A|$,

**उत्तर (422)**

**हल** A तथा B स्वंतत्र घटनाऐं हैं।

$\because P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

$\Rightarrow \dfrac{|A \cap B|}{|S|} = \dfrac{|A|}{|S|} \cdot \dfrac{|B|}{|S|}$

$\Rightarrow |S|\ |A \cap B| = |A|.\ |B|$

$\Rightarrow 6.|A \cap B| = |A|.\ |B|$ ...(i)

$\because |A| > |B| \ge 1$

इसलिए $|A|$ के सम्भव मान 2, 3, 4 या 6 हो सकते हैं

$|A| \ne 5$; क्योंकि $|A| = 5$ समीकरण (i)) को संतुष्ट नहीं कर सकता है

**स्थिति-1 :**

यदि $|A| = 2$ तब $|B| = 1$ (यह भी समीकरण (i) को संतुष्ट नहीं करता है)

**स्थिति-2 :**

यदि $|A| = 3$ तब $|B| = 2$ तथा $|A \cap B| = 1$

तरीकों की संख्या = ${}^6C_3 \cdot {}^3C_1 \cdot {}^3C_1 = 180$

**स्थिति-3 :**

यदि $|A| = 4$ तब $|B| = 3$ तथा $|A \cap B| = 2$

तरीकों की संख्या = ${}^6C_4 \cdot {}^4C_2 \cdot {}^2C_1 = 180$

**स्थिति-4 :**

यदि $|A| = 6$ तब 1 से 5 के मध्य $|B|$ कोई संख्या हो सकती है

तरीकों की संख्या = ${}^6C_6 \cdot [{}^6C_1 + {}^6C_2 + ... + {}^6C_5] = 62$

तरीकों की कुल संख्या = 180 + 180 + 62 = 422

2. निम्न समाकल का मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}\right)^5} d\theta$$

**उत्तर (0.50)**

**हल**

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\cos\theta}}{\left(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}\right)^5} \quad ...(i)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\sqrt{\sin\theta}}{\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}\right)^5} \quad ...(ii)$$

[गुणधर्म-III का प्रयोग करने पर f(x) = f(a + b – x) ]

अब, (i) + (ii) का योग कीजिए

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{3\left(\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}\right)}{\left(\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}\right)^5} d\theta$$

$$\frac{2I}{3}=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}+\sqrt{\cos\theta}}\right)^4 d\theta$$

$$\frac{2I}{3}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\theta}{\left(1+\sqrt{\tan\theta}\right)^4}d\theta$$

माना $\tan\theta = U^2$

$\sec^2\theta d\theta = 2U dU$ $\qquad$ $\theta\to 0 \quad U\to 0$

$\theta\to\frac{\pi}{2} \quad U\to\infty$

अब, $\frac{2I}{3}=\int_0^{\infty}\frac{2U dU}{(1+U)^4}$

$$\frac{2}{3}I=\int_0^{\infty}2.\frac{(U+1-1)}{(1+U)^4}dU$$

$$\frac{I}{3}=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(U+1)^3}-\frac{1}{(U+1)^4}\right]dU$$

$$\frac{I}{3}=\left[\frac{1}{-2(U+1)^2}+\frac{1}{3(U+1)^3}\right]_0^{\infty}$$

$$\frac{I}{3}=+\frac{1}{6}$$

$$I=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{I=0.5}$$

3. माना

$$\det\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{n}k & \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k k^2\\ \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k k & \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k 3^k\end{bmatrix}=0$$

किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए मान्य है। तब $\sum_{k=0}^{n}\frac{{}^nC_k}{k+1}$ का मान है

**उत्तर (6.20)**

**हल**

$$\begin{vmatrix}\sum_{k=0}^{n}k & \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k k^2\\ \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k k & \sum_{k=0}^{n}{}^nC_k 3^k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n(n+1)2^{n-2}\\ n.2^{n-1} & 4^n\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2}\cdot 2^{2n}=n^2(n+1)\cdot 2^{2n-3}\Rightarrow n=4$$

अब, $\sum_{k=0}^{4}\frac{{}^4C_k}{k+1}=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}{}^5C_{k+1}=\frac{1}{5}[2^5-1]=\frac{31}{5}$

$= 6.20$

4. अन्तराल $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ में

$$\sec^{-1}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right)$$

का मान है

**उत्तर (0.00)**

**हल**

$$\sum_{k=0}^{10}\frac{1}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{10}\frac{\sin\left[\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)-\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right).\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{10}\left[\tan\left(\frac{7\pi}{12}+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)-\tan\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \tan\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{11\pi}{2}\right)-\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}} = 4$$

इसलिए, $\sec^{-1}\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{10}\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\cdot\sec\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\right) = \sec^{-1}(1)$

$= 0$

5. माना $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ दो सदिश हैं। एक सदिश $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ पर विचार कीजिए। यदि सदिश $(\vec{a}+\vec{b})$ पर $\vec{c}$ का प्रक्षेप $3\sqrt{2}$ है, तब $(\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c}$ का न्यूनतम मान है।

**उत्तर (18)**

**हल** दिया है $\frac{(\vec{a}+\vec{b})}{(|\vec{a}+\vec{b}|)}\cdot\vec{c}=3\sqrt{2}$ $\quad\because\quad \vec{a}+\vec{b}=3\hat{i}+3\hat{j}$

इसलिए $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=18$ $\quad |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ $6\alpha + 6\beta + 3\alpha + 3\beta = 18$ $\quad |\vec{a}|=\sqrt{6},\ |\vec{b}|=\sqrt{6}$

$\boxed{\alpha+\beta=2}$ $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

अब $\left(\vec{c}-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{c}$ का न्यूनतम मान

$=\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)$

$= \alpha^2(6) + \alpha\beta(3) - 0 + \alpha\beta(3) + \beta^2(6) - 0$

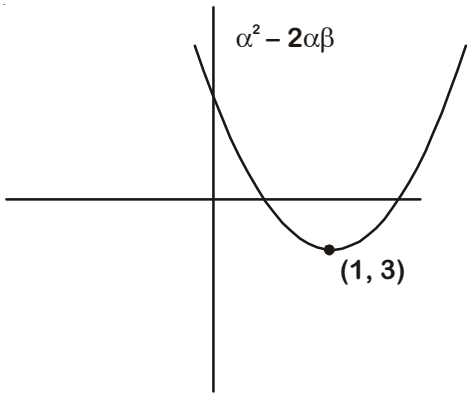
$= 6(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$

$=6\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]$

$= 6[4 - \alpha(2 - \alpha)]$

$= 6(4 - 2\alpha + \alpha^2)$

$6(4 - 2\alpha + \alpha^2) = 6(4 - 2 + 1)$ का न्यूनतम मान $= 18$




6. A, B, C, D व E पाँच व्यक्ति वृत्ताकार तरीके से बैठे हैं। यदि उनमें से प्रत्येक को तीन रंगों लाल, नीचे व हरे में से एक रंग की टोपी दी जाती है, तब कितने तरीकों से टोपियाँ बाँटी जाती हैं जबकि निकटवर्ती सीटों पर बैठे व्यक्तियों को भिन्न रंगों की टोपियाँ प्राप्त हों?

**उत्तर (30)**

**हल** दिया है कि कोई भी दो व्यक्ति निकट नहीं बैठे हैं जिनकी टोपियाँ समान रंग की हैं। इसलिए सभी रंगों की टोपियाँ पहनी जाऐंगी। इसी प्रकार भिन्न रंगों की टोपियाँ 1 + 1 + 3 संचय में नहीं पहनी जा सकती हैं क्योंकि कोई भी तीन टोपियाँ समान रंग की नहीं हो सकती हैं।

फलस्वरूप केवल एक शेष संचय 2 + 2 + 1 है

टोपियों के चयन की कुल 3 स्थितियाँ हैं जो

2R + 2B + 1G या 2B + 2G + 1R या 2G + 2R + 1B है

इन टोपियों को बाँटने के लिए सर्वप्रथम हम एक व्यक्ति का ${}^5C_1$ तरीकों से चयन करते हैं तथा वह टोपी बाँटते हैं जो इसमें से एक रंग की हैं। तब शेष चार व्यक्तियों के लिए एक के बाद एक रंग की टोपियाँ बाँटने के दो तरीके हैं। इसलिए कुल तरीके $3 \times {}^5C_1 \times 2 = 30$ होंगे।

## खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में दो (02) सूची-मिलान समुच्चय हैं।
- प्रत्येक सूची-मिलान समुच्चय में दो (02) बहुविकल्पी प्रश्न हैं।
- प्रत्येक सूची मिलान समुच्चय में दो सूचियाँ हैं: सूची-I तथा सूची-II.
- सूची-I में चार प्रविष्टियाँ हैं (I), (II), (III) तथा (IV) तथा सूची-II में छः प्रविष्टियाँ हैं (P), (Q), (R), (S), (T) तथा (U) .
- सूची-I तथा सूची-II के आधार पर प्रत्येक बहुविकल्पी प्रश्न में चार विकल्प दिये गये हैं तथा इन चार विकल्पों में से केवल एक बहुविकल्पी प्रश्न में पूछी गई स्थिति को सन्तुष्ट करता है।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन नीचे दी गई अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *पूर्ण अंक* | : | +3 | यदि केवल सही संयोजन के संगत विकल्प का चयन किया गया है; |
| *शून्य अंक* | : | 0 | यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है); |
| *ऋणात्मक अंक* | : | –1 | अन्य सभी स्थितियों में। |

1. अनुच्छेद में दी गई सूचना के आधार पर सूचियों के उचित मिलान द्वारा निम्न का उत्तर दीजिए।

माना $f(x) = \sin(\pi\cos x)$ तथा $g(x) = \cos(2\pi\sin x)$ दो फलन $x > 0$ के लिए परिभाषित हैं। निम्न समुच्चयों को परिभाषित कीजिए जिनके अवयव बढ़ते क्रम में लिखे गए है :

$X = \{x : f(x) = 0\}$, $Y = \{x : f'(x) = 0\}$,

$Z = \{x : g(x) = 0\}$, $W = \{x : g'(x) = 0\}$.

सूची-I में समुच्चय X, Y, Z व W हैं। सूची -II में इन समुच्चयों से सम्बन्धित कुछ सूचनाएँ हैं।

| सूची-I | | सूची-II |
|---|---|---|
| (I) | X | (P) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi\right\}$ |
| (II) | Y | (Q) एक समान्तर श्रेढ़ी |
| (III) | Z | (R) एक समान्तर श्रेढ़ी नहीं |
| (IV) | W | (S) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$ |
| | | (T) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ |
| | | (U) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ |

निम्न में से कौन केवल सही संयोजन हैं?

(A) (II), (R), (S) (B) (I), (Q), (U)

(C) (II), (Q), (T) (D) (I), (P), (R)

**उत्तर (C)**

2. अनुच्छेद में दी गई सूचना के आधार पर सूचियों के उचित मिलान द्वारा निम्न का उत्तर दीजिए।

माना $f(x) = \sin(\pi\cos x)$ तथा $g(x) = \cos(2\pi\sin x)$ दो फलन $x > 0$ के लिए परिभाषित हैं। निम्न समुच्चयों को परिभाषित कीजिए जिनके अवयव बढ़ते क्रम में लिखे गए है :

$X = \{x : f(x) = 0\}$, $Y = \{x : f'(x) = 0\}$,

$Z = \{x : g(x) = 0\}$, $W = \{x : g'(x) = 0\}$.

सूची-I में समूच्चय X, Y, Z व W हैं। सूची-II में इन समुच्चयों से सम्बन्धित कुछ सूचनाएँ हैं

| सूची-I | | सूची-II |
|---|---|---|
| (I) | X | (P) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 4\pi, 7\pi\right\}$ |
| (II) | Y | (Q)एक समान्तर श्रेढ़ी |
| (III) | Z | (R)एक समान्तर श्रेढ़ी नहीं |
| (IV) | W | (S) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right\}$ |
| | | (T) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$ |
| | | (U) $\supseteq \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ |

निम्न में से कौन केवल सही संयोजन है?

(A) (IV), (P), (R), (S)

(B) (IV), (Q), (T)

(C) (III), (R), (U)

(D) (III), (P), (Q), (U)

**उत्तर (A)**

प्र. 1, 2 के लिए संयुक्त हल

**हल** $f(x) = \sin(\pi\cos x)$ , $x > 0$

$g(x) = \cos(2\pi\sin x)$, $x > 0$

$f'(x) = -\pi\sin x \cos(\pi\cos x)$

$g'(x) = -2\pi\cos x \sin(2\pi\sin x)$

अब

$X = \{x : f(x) = 0\}$

इसलिए $\sin(\pi\cos x) = 0$

$\pi\cos x = n\pi, n \in Z$

$\cos x = n$

$\cos x = -1, 0, 1$

$\cos x = \pm 1 \Rightarrow x = n\pi$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ (I) $\rightarrow$ P, Q

$Y = \{x : f'(x) = 0\}$

इसलिए $-\pi\sin x \cos(\pi\cos x) = 0$

$\sin x = 0$ या $\pi\cos x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

$x = n\pi, n \in Z$ $\cos x = (2n+1)\frac{1}{2}, n \in Z$

$\cos x = \pm\frac{1}{2}$

$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ या $x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ (II) $\rightarrow$ Q, T

$Z = \{x : g(x) = 0\}$

इसलिए $\cos(2\pi\sin x) = 0$

$2\pi\sin x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

$\sin x = \frac{(2n+1)}{4}$ अत: $\sin x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{-3}{4}$

$\Rightarrow$ (III) $\rightarrow$ R

$W = \{x : g'(x) = 0\}$

$-2\pi\cos x \sin(2\pi\sin x) = 0$

$\cos x = 0$

$\Rightarrow \quad x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$

या $\quad \sin(2\pi\sin x) = 0$

$\Rightarrow \quad 2\pi\sin x = n\pi, n \in Z$

$\sin x = \frac{n}{2}$ इसलिए $\sin x = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{-1}{2}, -1$

$x = n\pi, x = n\pi + (-1)^n\left(\pm\frac{\pi}{6}\right), x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ (IV) $\rightarrow$ P, R, S

3. अनुच्छेद में दी गई सूचना के आधार पर सूचियों के उचित मिलान द्वारा निम्न का उत्तर दीजिए।

माना वृत्त $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ तथा $c_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ बिंदु X तथा Y पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना एक अन्य वृत्त $C_3 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ निम्न प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

(i) $C_3$ का केन्द्र $C_1$ व $C_2$ के केन्द्र के साथ सरेखीय है

(ii) $C_1$ व $C_2$ दोनों $C_3$ के अन्दर स्थित है तथा

(iii) $C_3$, $C_1$ को M व $C_2$ को N पर स्पर्श करता है।

माना X व Y से गुजरने वाली रेखा $C_3$ को Z व W पर प्रतिच्छेद करती है तथा माना $C_1$ व $C_3$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा परवलय $x^2 = 8ay$ की एक स्पर्श रेखा है।

सूची-I में कुछ व्यंजक दिये गए हैं जिनके मान सूची-II में दिए गए हैं :

| सूची-I | | सूची-II | |
|---|---|---|---|
| (I) | $2h + k$ | (P) | 6 |
| (II) | $\frac{\text{ZW की लम्बाई}}{\text{XY की लम्बाई}}$ | (Q) | $\sqrt{6}$ |
| (III) | $\frac{\text{त्रिभुज MZN का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ZMW का क्षेत्रफल}}$ | (R) | $\frac{5}{4}$ |
| (IV) | $\alpha$ | (S) | $\frac{21}{5}$ |
| | | (T) | $2\sqrt{6}$ |
| | | (U) | $\frac{10}{3}$ |

निम्न में सें कौन केवल सही संयोजन है?

(A) (I), (S) (B) (II), (Q)

(C) (II), (T) (D) (I), (U)

**उत्तर (B)**

4. अनुच्छेद में दी गई सूचना के आधार पर सूचियों के उचित मिलान द्वारा निम्न का उत्तर दीजिए।

माना वृत्त $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ तथा $C_2 : (x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$ बिंदु X तथा Y पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना एक अन्य वृत्त $C_3 : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ निम्न प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है :

(i) $C_3$ का केन्द्र $C_1$ व $C_2$ के केन्द्रों के साथ सरेखीय है

(ii) $C_1$ व $C_2$ दोनों $C_3$ के अन्दर स्थित है तथा

(iii) $C_3$, $C_1$ को M पर व $C_2$ को N पर स्पर्श करता है।

माना X व Y से गुजरने वाली रेखा $C_3$ को Z व W पर प्रतिच्छेद करती है तथा माना $C_1$ व $C_3$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा परवलय $x^2 = 8\alpha y$ की एक स्पर्श रेखा है

सूची-I में कुछ व्यंजक दिए गए हैं। जिनके मान सूची-II में दिये गए हैं :

| सूची-I | सूची-II |
|---|---|
| (I) $2h + k$ | (P) 6 |
| (II) $\frac{ZW \text{ की लम्बाई}}{XY \text{ की लम्बाई}}$ | (Q) $\sqrt{6}$ |
| (III) $\frac{\text{त्रिभुज MZN का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज ZMW का क्षेत्रफल}}$ | (R) $\frac{5}{4}$ |
| (IV) $\alpha$ | (S) $\frac{21}{5}$ |
| | (T) $2\sqrt{6}$ |
| | (U) $\frac{10}{3}$ |

निम्न में से केवल कौनसा संयोजन गलत है?

(A) (III), (R) (B) (IV), (U)

(C) (IV), (S) (D) (I), (P)

**उत्तर** (C)

**हल** प्र.3 तथा प्र.4 के लिए संयुक्त हल

$C_1$, $C_2 + C_3$ के दिये गए केन्द्र सरेखीय हैं

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ h & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\boxed{3k = 4h}$ ...(i)

तथा MN, $C_3$ का व्यास है

इसलिए, $MN = 3 + \sqrt{(3-0)+(4-0)^2} + 4$

$= 12$

अत: $\boxed{r = 6}$ ...(ii)

दिया है कि $C_3$, $C_1$ को M पर स्पर्श करता है

इसलिए, $|C_1C_3| = |r - 3|$

$\Rightarrow h^2 + k^2 = 9$ ...(iii)

समीकरण (i) + (iii) से

$h = \pm\frac{9}{5}$ तथा $k = \pm\frac{12}{5}$

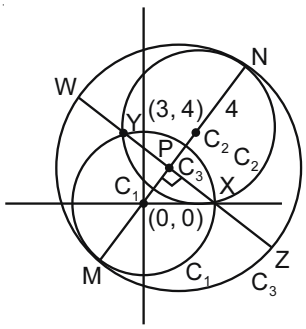
इसलिए $C_3$ का केन्द्र $\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ है

अब XY का समीकरण

$\Rightarrow C_1 - C_2 = 0$

$\Rightarrow 6x + 8y = 18$ है

$\boxed{3x + 4y = 9}$ ...(iv)




$C_1(0, 0)$

$C_3(h, k)$

अब $C_1P = \frac{9}{5}$ (XY के समीकरण की मूलबिंदु से दूरी)

अब $PY^2 = C_1Y^2 - C_1P^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{144}{25}$

$XY = 2PY = 2 \times \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$

इसी प्रकार से ZW का समीकरण $3x + 4y = 9$ है

इसलिए $C_3$ से ZW पर लम्ब की लम्बाई $= \left| \frac{3\left(\frac{9}{5}\right) + 4\left(\frac{12}{5}\right) - 9}{5} \right|$ है

$= \frac{6}{5}$

अब $ZW = 2\sqrt{(6)^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{24\sqrt{6}}{5}$

(1) $2h + k = 2 \times \frac{9}{5} + \frac{12}{5} = \frac{30}{5} = 6$ $\boxed{(I) \rightarrow P}$

(2) $\frac{ZW \text{ की लम्बाई}}{XY \text{ की लम्बाई}} = \sqrt{6}$ $\boxed{(II) \rightarrow Q}$

(3) $\frac{\Delta MZN \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ZMW \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{\frac{1}{2} \times MN \times PZ}{\frac{1}{2} \times ZW \times MP} = \frac{\frac{1}{2} \times (2)(6) \times \frac{1}{2}(ZW)}{\frac{1}{2}(ZW) \times (MC_1 + C_1P)}$

$= \frac{6}{\left(3 + \frac{9}{5}\right)} = \frac{6 \times 5}{24} = \frac{5}{4}$ $\boxed{(III) \rightarrow R}$

(4) M पर स्पर्श रेखा परवलय $x^2 = 8\alpha y$ की भी स्पर्श रेखा है

इसलिए M पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $= -\left(\frac{1}{4/3}\right) = -\frac{3}{4}$

अत: M पर $C_1$ की स्पर्श रेखा का समीकरण

$y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ है जहाँ $a = 3,\ m = -\frac{3}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x - 3\sqrt{1 + \frac{9}{16}}$ (∴ y-अन्त: खण्ड ऋणात्मक है)

$\Rightarrow$ $\boxed{4y + 3x + 15 = 0}$

जो $x^2 = 8\alpha y$ की स्पर्श रेखा है

इसलिए $x^2 = 8\alpha y$ की स्पर्श रेखा की समीकरण $y = mx - 2\alpha m^2$ है

अत: तुलना करने पर, इसलिए

$\boxed{\alpha = \frac{10}{3}}$ $\boxed{(IV) \rightarrow U}$

❑ ❑ ❑