



Corporate Office : Aakash Tower, 8, Pusa Road, New Delhi-110005 | Ph.: 011-47623456

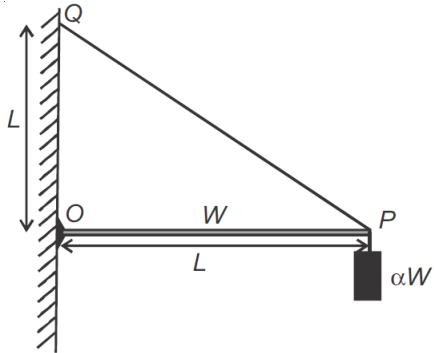
Answers & Solutions for JEE (Advanced)-2021 (Paper-2) PHYSICS

खंड - 1

- इस खंड में छ: (06) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	:	+4	यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है;
आंशिक अंक	:	+3	यदि चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;
आंशिक अंक	:	+2	यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;
आंशिक अंक	:	+1	यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;
शून्य अंक	:	0	यदि प्रश्न अनुत्तरित है;
ऋण अंक	:	-2	अन्य सभी परिस्थितियों में।
- उदाहरण के लिए, एक प्रश्न में यदि (A), (B) तथा (D) सही उत्तरों से संबंधित केवल तीन विकल्प हैं, तो केवल (A), (B) तथा (D) के चुने जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;
केवल (A) तथा (B) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
केवल (A) तथा (D) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
केवल (B) तथा (D) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
केवल (A) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
केवल (B) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
केवल (D) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
किसी भी विकल्प (विकल्पों) का चयन न किए जाने पर (अर्थात् अनुत्तरित प्रश्न) 0 अंक प्राप्त होगा तथा
किसी भी अन्य विकल्पों के चुने जाने पर -2 अंक प्राप्त होंगे।

1. W भार तथा L लम्बाई के एक क्षैतिज एकसमान दण्ड के एक सिरे को किसी ऊर्ध्वाधर दीवार पर बिन्दु O पर कीलकित किया जाता है तथा इसके दूसरे सिरे को एक हल्की अवितान्य रस्सी द्वारा आधारित किया जाता है। रस्सी का दूसरा सिरा बिन्दु O पर कीलक के ऊपर L ऊँचाई पर बिन्दु Q पर दृढ़ित है। αW भार के एक गुटके को चित्रानुसार दण्ड के बिन्दु P पर संयोजित किया जाता है (चित्र सांकेतिक है)। रस्सी $(2\sqrt{2})W$ का अधिकतम तनाव सहन कर सकती है। निम्न में से कौन-सा/से कथन सही है/हैं?



- (A) O पर प्रतिक्रिया बल का ऊर्ध्वाधर घटक, α पर निर्भर नहीं करता है
- (B) O पर प्रतिक्रिया बल का क्षैतिज घटक, $\alpha = 0.5$ के लिए W के बराबर है
- (C) रस्सी में तनाव $\alpha = 0.5$ के लिए $2W$ है
- (D) यदि $\alpha > 1.5$, तब रस्सी टूट जाती है

उत्तर (A, B, D)

$$\text{हल } W \times \frac{L}{2} + \alpha W \times L = T \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times L$$

$$\Rightarrow T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) W$$

$$\therefore T \times \frac{1}{\sqrt{2}} + F_V = W + \alpha W$$

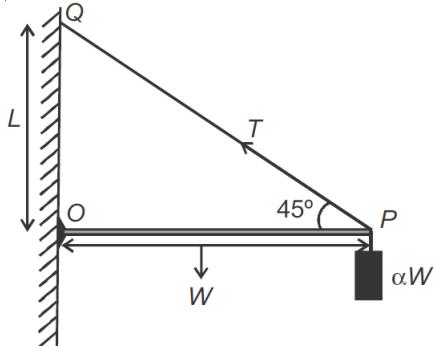
$$\Rightarrow \frac{W}{2} + \alpha W + F_V = W + \alpha W$$

$$\Rightarrow F_V = \frac{W}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ पर}, \quad T = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) W = \sqrt{2} W$$

$$F_H \left(\alpha = \frac{1}{2} \text{ पर} \right) = \sqrt{2} W \times \frac{1}{\sqrt{2}} = W$$

$$\alpha = 1.5 \text{ पर } T = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) W = 2\sqrt{2} W$$



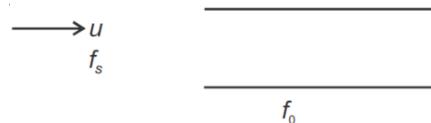
2. L लम्बाई के एक स्थिर पाईप के खुले सिरे की ओर u चाल से आ रहा एक स्रोत f_s आवृत्ति की ध्वनि उत्सर्जित कर रहा है। पाईप का दूरस्थ सिरा बंद है। वायु में ध्वनि की चाल v है तथा पाईप की मूलभूत आवृत्ति f_0 है। u तथा f_s के निम्न में कौनसे संयोजन के लिए, ध्वनि के पाईप पर पहुँचने पर अनुनाद उत्पन्न होगा?

- (A) $u = 0.8v$ तथा $f_s = f_0$
- (B) $u = 0.8v$ तथा $f_s = 2f_0$
- (C) $u = 0.8v$ तथा $f_s = 0.5f_0$
- (D) $u = 0.5v$ तथा $f_s = 1.5f_0$

उत्तर (A, D)

हल अनुनाद के लिए,

$$\frac{v}{v-u} \times f_s = (\text{विषम}) \times f_0$$



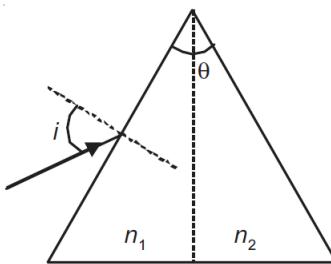
(A) $\frac{v}{v-0.8v} \times f_0 = 5f_0$

(B) $\frac{v}{v-0.8v} \times 2f_0 = 10f_0$

(C) $\frac{v}{v-0.8v} \times \left(\frac{f_0}{2}\right) = \frac{5}{2}f_0$

(D) $\frac{v}{v-0.5v} \times \left(\frac{3f_0}{2}\right) = 3f_0$

3. प्रिज्म कोण $\theta = 60^\circ$ के एक प्रिज्म के लिए, चित्रानुसार बायें आधे भाग तथा दायें आधे भाग के अपवर्तनांक क्रमशः n_1 तथा n_2 ($n_2 \geq n_1$) हैं। आपतन कोण i का चयन इस प्रकार किया जाता है कि आपतित प्रकाश किरणों का विचलन न्यूनतम हो यदि $n_1 = n_2 = n = 1.5$ है। असमान अपवर्तनांक की स्थिति के लिए $n_1 = n$ तथा $n_2 = n + \Delta n$ (जहाँ $\Delta n \ll n$), निर्गमन कोण $e = i + \Delta e$ है। निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?



- (A) Δe का मान (रेडियन में) Δn के मान से अधिक है
- (B) $\Delta e, \Delta n$ के समानुपाती है
- (C) यदि $\Delta n = 2.8 \times 10^{-3}$, तब Δe , 2.0 तथा 3.0 मिलिरेडियन के मध्य में स्थित है
- (D) यदि $\Delta n = 2.8 \times 10^{-3}$, तब Δe , 1.0 तथा 1.6 मिलिरेडियन के मध्य में स्थित है

उत्तर (B, C)

हल $n_1 = n_2 = n = 1.5$ के लिए

$$r = 30^\circ$$

$$\therefore \sin i = 1.5 \times \sin (30^\circ) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 \text{ के लिए } \sin e = \frac{3}{4}$$

$$\text{अब } r' = 30^\circ \text{ तथा } n_2 = n + \Delta n$$

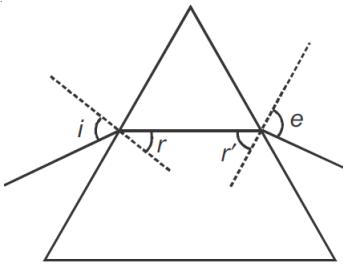
$$(n_2) \times \sin(r') = 1 \times \sin e$$

$$\Rightarrow \Delta n_2 \times \sin(30^\circ) = \cos e \times \Delta e$$

$$\Rightarrow \Delta e = \frac{(\Delta n) \times \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{9}{16}}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Delta n$$

$$\Rightarrow \Delta e < \Delta n \text{ तथा, } \Delta e \propto \Delta n$$

$$\Delta n = 2.8 \times 10^{-3} \text{ पर, } \Delta e = 2.12 \times 10^{-3} \text{ रेडियन}$$



4. एक भौतिक राशि \vec{S} को $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B}) / \mu_0$ के अनुसार परिभाषित किया जाता है, जहाँ \vec{E} विद्युत क्षेत्र है, \vec{B} चुम्बकीय क्षेत्र है तथा μ_0 मुक्त त्रिविम की पारगम्यता है। \vec{S} की विमायें निम्न में से किन राशियों की विमाओं के समान हैं?

(A) $\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आवेश} \times \text{धारा}}$

(B) $\frac{\text{बल}}{\text{लम्बाई} \times \text{समय}}$

(C) $\frac{\text{ऊर्जा}}{\text{आयतन}}$

(D) $\frac{\text{शक्ति}}{\text{क्षेत्रफल}}$

उत्तर (B, D)

हल $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$

\vec{S} को प्लाइटिंग सदिश कहा जाता है तथा यह विद्युत चुम्बकीय तरंगों की तीव्रता को प्रदर्शित करता है।

$$[\vec{S}] = [MT^{-3}] = \left[\frac{\text{शक्ति}}{\text{क्षेत्रफल}} \right] = \left[\frac{\text{बल}}{\text{लम्बाई} \times \text{समय}} \right]$$

5. विराम में स्थित एक भारी नाभिक N विखण्डन $N \rightarrow P + Q$ से गुजरता है, जहाँ P तथा Q दो हल्के नाभिक हैं। माना $\delta = M_N - M_P - M_Q$, जहाँ M_P, M_Q तथा M_N क्रमशः P, Q तथा N के द्रव्यमान हैं। E_P तथा E_Q क्रमशः P तथा Q की गतिज ऊर्जायें हैं। P तथा Q की चाल क्रमशः V_P तथा V_Q हैं। यदि c प्रकाश की चाल है, तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

(A) $E_P + E_Q = c^2 \delta$

(B) $E_P = \left(\frac{M_P}{M_P + M_Q} \right) c^2 \delta$

(C) $\frac{V_P}{V_Q} = \frac{M_Q}{M_P}$

(D) P तथा Q के लिए संवेग का परिमाण $c\sqrt{2\mu\delta}$ है, जहाँ $\mu = \frac{M_P M_Q}{(M_P + M_Q)}$

उत्तर (A, C, D)

हल $E_P + E_Q = \delta c^2$ (नाभिकीय अभिक्रिया का Q-मान)

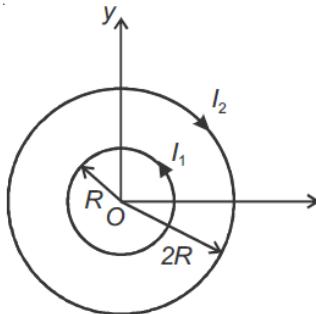
$$\sqrt{2M_P E_P} = \sqrt{2M_Q E_Q} \quad \text{या} \quad M_P V_P = M_Q V_Q$$

$$\Rightarrow \frac{E_P}{E_Q} = \frac{M_Q}{M_P}$$

$$\Rightarrow E_P = \frac{M_Q}{M_P + M_Q} \delta c^2$$

$$\Rightarrow P \text{ या } Q \text{ का संवेग} = \sqrt{\frac{2M_P M_Q}{M_P + M_Q} \delta c^2}$$

6. दो संकेन्द्रीय वृत्तीय लूप, जिनमें से एक की त्रिज्या R तथा दूसरे की त्रिज्या $2R$ है, xy -तल में इस प्रकार स्थित हैं कि मूल बिन्दु चित्रानुसार इनका उभयनिष्ठ केन्द्र है। छोटा लूप वामावर्त दिशा में I_1 धारा ग्रहण किए हुए हैं तथा बड़ा लूप दक्षिणावर्त दिशा में I_2 धारा ग्रहण किए हुए हैं जहाँ $I_2 > 2I_1$ है। $\vec{B}(x, y)$, xy -तल में एक बिन्दु (x, y) पर चुम्बकीय क्षेत्र को प्रदर्शित करता है। निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?



- (A) $\vec{B}(x, y)$ तल में किसी बिन्दु पर xy -तल के लंबवत है
- (B) $|\vec{B}(x, y)|$, त्रिज्या दूरी $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ में केवल x तथा y पर निर्भर करता है
- (C) $|\vec{B}(x, y)|$, $r < R$ के लिए सभी बिन्दुओं पर अशून्य है
- (D) $\vec{B}(x, y)$ दोनों लूपों के मध्य सभी बिन्दुओं के लिए xy -तल से लम्बवत रूप से बाहर की ओर इंगित करता है

उत्तर (A, B)

हल एक वृत्तीय लूप के कारण इसके तल में किसी बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र तल के लम्बवत् होगा। सममिती के कारण यह केवल केन्द्र से दूरी पर निर्भर करेगा। क्षेत्र, लूप के अन्दर तथा इसके बाहर विपरीत दिशा में होगा।

क्षेत्र $r < R$ के लिए अशून्य हो सकता है, चूंकि यह दोनों लूपों के कारण विपरीत दिशा में है।

खंड - 2

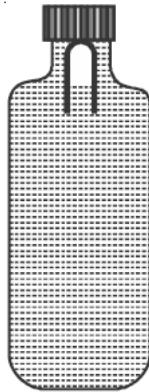
- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न अनुच्छेद हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न अनुच्छेद से संबंधित दो (02) प्रश्न दिए गए हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही संख्यात्मक मान को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिन्हित स्थान पर दर्ज करें।
 - यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो संख्यात्मक मान को/का दशमलव के दो स्थानों तक संक्षिप्त/सन्निकटन करें।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा।
- | | | |
|-----------|------|--|
| पूर्ण अंक | : +2 | यदि चिन्हित स्थान पर सिर्फ सही संख्यात्मक मान ही दर्ज किया गया है। |
| शून्य अंक | : 0 | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के लिए अनुच्छेद

अनुच्छेद

1 gm/cc घनत्व के जल से भरी एक नर्म प्लास्टिक बोतल में चित्रानुसार कुछ वायु (आदर्श गैस) भरी हुई काँच की परखनली है। परखनली का द्रव्यमान 5 gm है तथा यह 2.5 gm/cc घनत्व के एक मोटे काँच से बनी है। प्रारंभ में बोतल वायुमण्डलीय दाब $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ पर इस प्रकार सील बंद है कि इसमें भरी हुई वायु का आयतन $V_0 = 3.3 \text{ cc}$ है। जब बोतल को नियत ताप पर बाहर से दबाया जाता है, तब अंदर का दाब बढ़ता है तथा इसमें भरी हुई वायु का आयतन घटता है। यह पाया जाता है कि परखनली इसके अभिविन्यास में परिवर्तन किए बिना दाब $p_0 + \Delta p$ पर डूबना प्रारंभ करती है। इस दाब पर, इसमें भरी हुई वायु का आयतन $V_0 - \Delta V$ है।

माना $\Delta V = X \text{ cc}$ तथा $\Delta p = Y \times 10^3 \text{ Pa}$.



7. X का मान _____ है।

उत्तर (0.30)

8. Y का मान _____ है।

उत्तर (10.00)

प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के लिए हल

जब (परखनली + वायु) निकाय पर उत्प्लावक बल, परखनली के भार के बराबर हो जाएगा, तब परखनली डूबना प्रारम्भ करेगी। (यहाँ हम परखनली के भार की तुलना में वायु के भार को नगण्य मान सकते हैं)

अब, माना इस स्थिति में वायु का आयतन = $V_{वायु}$

$$F_B = mg$$

इसलिए, $\delta_w (V_{परखनली} + V_{वायु}) g = mg$

$$\Rightarrow 1 \left(\frac{5}{2.5} \text{ cm}^3 + V_{वायु} \right) = 5$$

$$\Rightarrow 2 + V_{वायु} = 5$$

$$V_{वायु} = 3 \text{ cm}^3$$

चूंकि वायु का प्रारम्भिक आयतन = 3.3 cm^3

इसलिए, $\Delta V = 0.3 \text{ cc}$

इसलिए, $X = 0.30$

चूंकि वायु का ताप नियत है

इसलिए, $PV = \text{नियत}$

$P_0 3.3 = P_f 3$, P_f वायु का अंतिम दबाव है

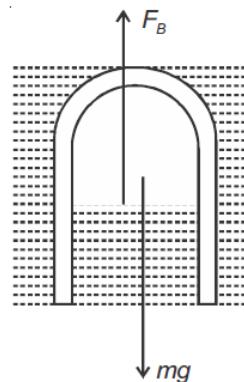
$$\Rightarrow P_f = 1.1 P_0 = P_0 + 0.1 P_0$$

इसलिए, $\Delta P = 10^4 \text{ Pa}$

इसलिए, $Y = 10$

इसलिए, $X = 0.30$

$$Y = 10.00$$



प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के लिए अनुच्छेद

अनुच्छेद

एक लोलक द्रव्यमान $m = 0.1 \text{ kg}$ के एक गोलक तथा लम्बाई $L = 1.0 \text{ m}$ की एक द्रव्यमानहीन अवितान्य डोरी से मिलकर बना है। इसे किसी घर्षणहीन क्षेत्रिज फर्श के ऊपर ऊँचाई $H = 0.9 \text{ m}$ पर एक स्थिर बिंदु से लटकाया जाता है। प्रारंभ में लोलक का गोलक निलंबन बिंदु से ऊर्ध्वाधर रूप से नीचे विराम में फर्श पर स्थित है। किसी क्षण पर गोलक को क्षेत्रिज आवेग $P = 0.2 \text{ kg-m/s}$ प्रदान किया जाता है। गोलक के कुछ दूरी के लिए फिसलने के बाद, डोरी तानित हो जाती है तथा गोलक फर्श से ऊपर उठ जाता है। गोलक के ऊपर उठने से ठीक पहले निलंबन बिंदु के सापेक्ष लोलक के कोणीय संवेग का परिमाण $J \text{ kg-m}^2/\text{s}$ है। गोलक के ऊपर उठने के ठीक बाद लोलक की गतिज ऊर्जा K जूल है।

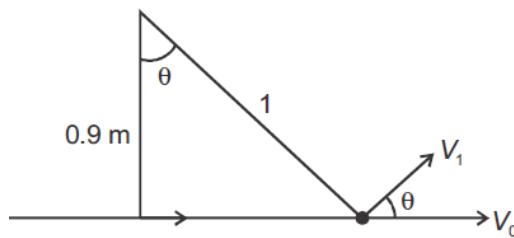
9. J का मान _____ है।

उत्तर (0.18)

10. K का मान _____ है।

उत्तर (0.16)

प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के लिए हल



$$V_0 = \frac{0.2}{0.1} = 2 \text{ m/s}$$

9. $L = P \times H$

$$= 0.2 \times 0.9$$

$$= 0.18 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$10. \quad V_1 = V_0 \cos \theta = 2 \times \left(\frac{0.9}{1} \right)$$

$$\therefore K = \frac{1}{2} \times (0.1) \times (2 \times 0.9)^2 = 0.162 \text{ जूल}$$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 के लिए अनुच्छेद

अनुच्छेद

एक परिपथ में, धारु फिलामेन्ट लैम्प को 200 V, 50 Hz सप्लाई के सिरों में $C \mu\text{F}$ धारिता के एक संधारित्र के साथ श्रेणी में संयोजित किया जाता है। लैम्प द्वारा व्ययित शक्ति 500 W है जबकि इसके सिरों में वोल्टता पतन 100 V है। माना परिपथ में कोई प्रेरकीय लोड नहीं है। वोल्टता के *rms* मान लीजिए। धारा तथा सप्लाई वोल्टता के मध्य कला-कोण (डिग्री में) का परिमाण ϕ है। माना $\pi\sqrt{3} \approx 5$.

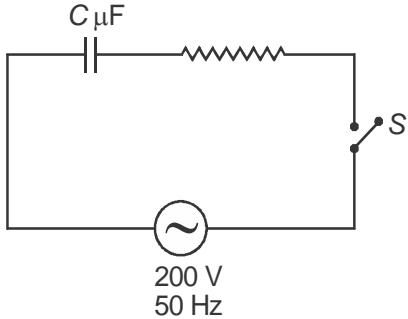
$$11. \quad C \text{ का मान } \underline{\hspace{2cm}} \text{ है।}$$

उत्तर (100)

$$12. \quad \phi \text{ का मान } \underline{\hspace{2cm}} \text{ है।}$$

उत्तर (60)

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 के लिए हल



$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow 500 = \frac{100^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = 20 \Omega$$

अब प्रतिरोध के सिरों पर

$$500 = I \times 100$$

$$\Rightarrow I_{\text{rms}} = 5 \text{ A}$$

$$V_{\text{rms}} = 200 \text{ V}, V_{\text{rms/वास्तविक}} = 100 \text{ V}$$

$$\cos \phi = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$

$$\tan \phi = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega RC}$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{100\pi(20)C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{20\pi\sqrt{3} \times 100} = 10^{-4} \text{ F} = 100 \mu\text{F}$$

ਖੰਡ - 3

- इस खंड में दो (02) अनुच्छेद हैं। प्रत्येक अनुच्छेद के आधार पर दो (02) प्रश्न दिए गए हैं
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही सही उत्तर है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

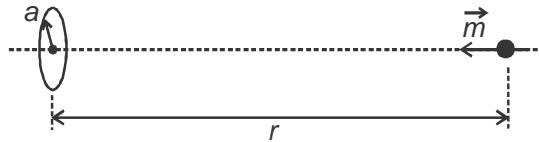
पूर्ण अंक	: +3	यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।
शून्य अंक	: 0	यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)
ऋण अंक	: -1	अन्य सभी परिस्थितियों में।

अनुच्छेद

एक विशेष धातु S किसी प्रतिरोध के बिना विद्युत का चालन करती है। S से निर्मित एक बन्द तार लूप प्रतिकारी फलक्स उत्पन्न करने के लिए उपयुक्त धारा उत्पन्न कर स्वयं से फलक्स में कोई परिवर्तन नहीं होने देता है। लूप में प्रेरित धारा का इसके शून्य प्रतिरोध के कारण क्षय नहीं हो सकता है। इस धारा के कारण चुम्बकीय आघूर्ण में वृद्धि होती है, जिसके परिणामस्वरूप चुम्बकीय क्षेत्र या फलक्स का स्रोत प्रतिकर्षित होता है। a त्रिज्या के इस प्रकार के एक लूप पर विचार कीजिए इसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है। नीचे चित्र में दर्शाए अनुसार m आघूर्ण के एक चुम्बकीय द्विध्रुव को इस लूप के अक्ष के अनुदिश अनन्त से लूप के केन्द्र से r दूरी (>> a) पर एक बिन्दु तक लाया जाता है तथा इसका उत्तर ध्रुव सदैव लूप की ओर है।

एक द्विध्रुव m का इसके अक्ष पर r दूरी पर एक बिन्दु पर चुम्बकीय क्षेत्र का परिमाण $\frac{\mu_0 m}{2\pi r^3}$ है, जहाँ μ_0 मुक्त त्रिविम की पारगम्यता

है। m_1 व m_2 आधूर्ण के दो चुम्बकीय द्विध्रुव उभयनिष्ठ अक्ष पर r दूरी द्वारा पृथक्कृत हैं, इनके मध्य बल का परिमाण $\frac{km_1m_2}{r^4}$ है, इनके उत्तर ध्रुव एक दूसरे की ओर हैं, जहाँ k उपयुक्त विमाओं का एक नियतांक है। इस बल की दिशा दोनों ध्रुवों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश है।



13. जब द्विध्रुव m को लूप के केन्द्र से r दूरी पर रखा जाता है (चित्र में दर्शाए अनुसार), तब लूप में प्रेरित धारा किसके समानुपाती होगी?

(A) m/r^3 (B) m^2/r^2
 (C) m/r^2 (D) m^2/r

उत्तर (A)

$$\text{हल} \quad \text{द्विघुरु के कारण वलय से गुजरने वाला चुम्बकीय फ्लक्स = \frac{\mu_0}{2\pi} \times \frac{m}{r^3} \times \pi a^2$$

लूप से गुजरने वाले नेट चुम्बकीय फलक्स के शून्य होने के लिए
द्विध्रुव के कारण चुम्बकीय फलक्स = प्रेरित धारा के कारण चुम्बकीय फलक्स

$$\Rightarrow \frac{\mu_0}{2\pi} \times \pi a^2 \times \frac{m}{r^3} = I \times \pi a^2 \times \frac{k}{a}, \text{ जहाँ } k \text{ समानुपाती नियतांक है}$$

$$\Rightarrow I \propto \frac{m}{r^3}$$

14. दी गई प्रक्रिया द्वारा द्विध्रुव को अनन्त से लूप के केन्द्र से दूरी r तक लाने में किया गया कार्य किसके समानुपाती है?
- (A) m/r^5
 (B) m^2/r^5
 (C) m^2/r^6
 (D) m^2/r^7

उत्तर (C)

$$\text{हल } F = \frac{km_1 m_2}{r^4} = k(I\pi a^2) \left(\frac{m}{r^4} \right)$$

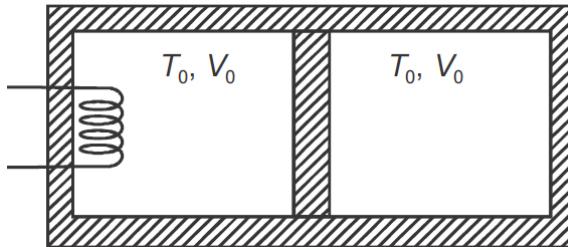
$F = C \frac{m^2}{r^7}$ जहाँ C , प्रश्न 13 से I के मान के प्रतिस्थापन द्वारा प्राप्त एक नियतांक है।

$$|W| = \int_{\infty}^r F dr = Cm^2 \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^7} = \frac{C'm^2}{r^6} \quad \text{जहाँ } C' \text{ एक नियतांक है।}$$

$$|W| \propto \frac{m^2}{r^6}$$

अनुच्छेद

एक तापीय रूप से कुचालक बेलन में नीचे चित्र में दर्शाए अनुसार मध्य में तापीय रूप से कुचालक तथा घर्षणहीन गतिमान विभाजक है। विभाजक के प्रत्येक भाग पर एक मोल आदर्श गैस है, जिसकी नियत आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा $C_v = 2R$ है। यहाँ R गैस नियतांक है। प्रारम्भ में प्रत्येक भाग का आयतन V_0 तथा ताप T_0 है। बाएँ भाग में एक विद्युत हीटर है, जो गैस को बाएँ भाग पर Q ऊष्मा स्थानान्तरित करने के लिए अत्यन्त निम्न शक्ति पर चालू होता है। जिसके परिणामस्वरूप विभाजक धीरे-धीरे दायीं ओर गति करता है, जिससे दाएँ भाग का आयतन $V_0/2$ तक घटता जाता है। परिणामस्वरूप बाएँ व दाएँ भाग पर गैस के ताप क्रमशः T_L व T_R हो जाते हैं। बेलन, हीटर तथा विभाजक के तापों में परिवर्तनों को नगण्य मानिए।



15. $\frac{T_R}{T_0}$ का मान है

(A) $\sqrt{2}$
 (B) $\sqrt{3}$
 (C) 2
 (D) 3

उत्तर (A)

हल $PV^\gamma = C$

$$\Rightarrow TV^{\gamma-1} = C$$

$$\Rightarrow T_0 V_0^{\gamma-1} = T_R \left(\frac{V_0}{2} \right)^{\gamma-1}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \gamma - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_R}{T_0} = 2^{\gamma-1} = \sqrt{2}$$

16. $\frac{Q}{RT_0}$ का मान है

(A) $4(2\sqrt{2} + 1)$

(B) $4(2\sqrt{2} - 1)$

(C) $(5\sqrt{2} + 1)$

(D) $(5\sqrt{2} - 1)$

उत्तर (B)

हल $Q = \Delta U_1 + \Delta U_2$

$$\Delta U_1 = C_V \Delta T_1 = 2R(T_L - T_0)$$

$$\Delta U_2 = C_V \Delta T_2 = 2R(T_R - T_0)$$

$$T_L = 3\sqrt{2}T_0, T_R = \sqrt{2}T_0$$

$$Q = 2R[3\sqrt{2} - 1]T_0 + 2R(\sqrt{2} - 1)T_0$$

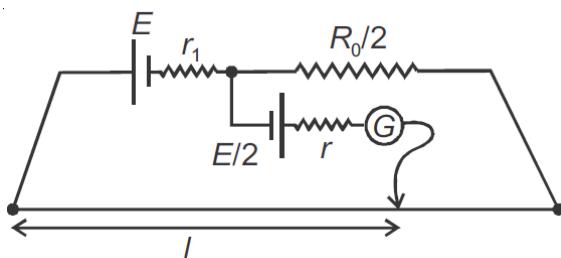
$$Q = 4RT_0[2\sqrt{2} - 1]$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{RT_0} = 4[2\sqrt{2} - 1]$$

खंड - 4

- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अ-ऋणात्मक पूर्णांक है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्युमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिन्हित स्थान पर उत्तर दर्ज कीजिए।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:
- | | | | |
|-----------|---|----|--|
| पूर्ण अंक | : | +4 | यदि केवल सही पूर्णांक मान ही दर्ज किया गया है। |
| शून्य अंक | : | 0 | अन्य सभी परिस्थितियों में |

17. वि. वा. ब. E के एक सेल के आंतरिक प्रतिरोध r_1 के मापन के लिए, एक परिपथ में चित्रानुसार तार प्रतिरोध $R_0 = 50 \Omega$ के एक मीटर सेतु, एक प्रतिरोध $R_0/2$, वि. वा. व. $E/2$ के अन्य सेल (आंतरिक प्रतिरोध r) तथा एक गेल्वेनोमीटर G का उपयोग किया जाता है। यदि शून्य विक्षेप बिंदु $I = 72 \text{ cm}$ पर पाया जाता है, तब r_1 का मान = ____ Ω



उत्तर (3)

हल धारा मुख्य परिपथ में प्रवाहित होगी

$$I = \frac{E}{r_1 + \frac{3R_0}{2}}$$

$$+E - IR_0 \times 0.72 - Ir_1 - \frac{E}{2} = 0$$

$$\frac{E}{2} = \frac{2E}{2r_1 + 3R_0} \times [0.72R_0 + r_1]$$

$$2r_1 + 3R_0 = 4[0.72R_0 + r_1]$$

$$0.12R_0 = 2r_1$$

$$r_1 = 3\Omega$$

18. द्रव्यमान $3M_s$ तथा $6M_s$ के दो तारों के मध्य दूरी $9R$ है। यहाँ R , पृथ्वी तथा सूर्य के केन्द्रों के मध्य माध्य दूरी है तथा M_s , सूर्य का द्रव्यमान है। दोनों तारे वृत्तीय कक्षाओं में अपने उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र के चारों ओर आवर्तकाल nT से परिक्रमण करते हैं जहाँ T सूर्य के चारों ओर पृथ्वी के परिक्रमण का आवर्तकाल है।

$$n \text{ का मान } \underline{\quad} \text{ है।}$$

उत्तर (9)



निकाय का द्रव्यमान केन्द्र हल्के द्रव्यमान से $6R$ पर स्थित है।

$$[3M_s \omega^2 \times 6R] = \frac{G(18M_s^2)}{81R^2}$$

$$\omega^2 R = \frac{GM_s}{81R^2}$$

$$T' = \sqrt{\frac{81R^3}{GM_s}}$$

$$T' = 9T$$

$$n = 09$$

19. किसी प्रकाश उत्सर्जन प्रयोग में, धातुओं P , Q तथा R से फोटो इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम गतिज ऊर्जायें क्रमशः E_p , E_q तथा E_r हैं तथा ये $E_p = 2E_q = 2E_r$ द्वारा संबंधित हैं। इस प्रयोग में, एकलवर्णीय प्रकाश के समान स्त्रोत का उपयोग धातुओं P तथा Q के लिए किया जाता है जबकि एकलवर्णीय प्रकाश के भिन्न-भिन्न स्त्रोतों का उपयोग धातु R के लिए किया जाता है। धातुओं P , Q तथा R के लिए कार्यफलन क्रमशः 4.0 eV , 4.5 eV तथा 5.5 eV हैं। धातु R के लिए प्रयुक्त आपतित फोटोन की ऊर्जा (eV में) $\underline{\quad}$ है।

उत्तर (6)

हल

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \varphi_p + E_p$$

$$\frac{hc}{\lambda_1} = \varphi_q + E_q$$

$$E_p = 2E_q$$

$$E_p - E_q = 0.5$$

$$\Rightarrow E_p = 1.0 \text{ eV}, E_q = 0.5 \text{ eV}$$

$$E_R = 0.5 \text{ eV}$$

$$R \text{ पर आपतित फोटोन की ऊर्जा} = \varphi_R + E_R = 6 \text{ eV}$$

CHEMISTRY

खंड - 1

- इस खंड में छ: (06) प्रश्न हैं।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर हैं।

प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है;
आंशिक अंक	: +3	यदि चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;
शून्य अंक	: 0	यदि प्रश्न अनुचित है;
ऋण अंक	: -2	अन्य सभी परिस्थितियों में।

उदाहरण के लिए, एक प्रश्न में यदि (A), (B) तथा (D) सही उत्तरों से संबंधित केवल तीन विकल्प हैं, तो

केवल (A), (B) तथा (D) के चुने जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) तथा (B) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) तथा (D) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;

केवल (A) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

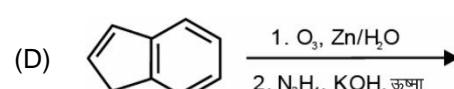
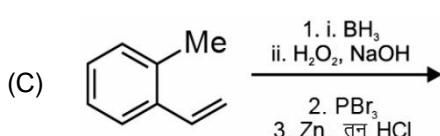
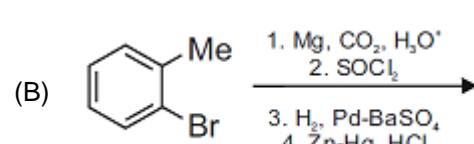
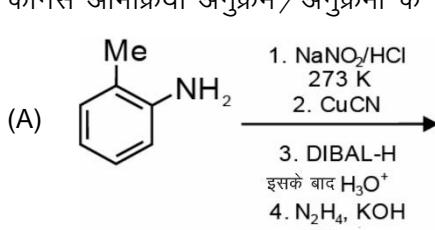
केवल (B) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

केवल (D) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;

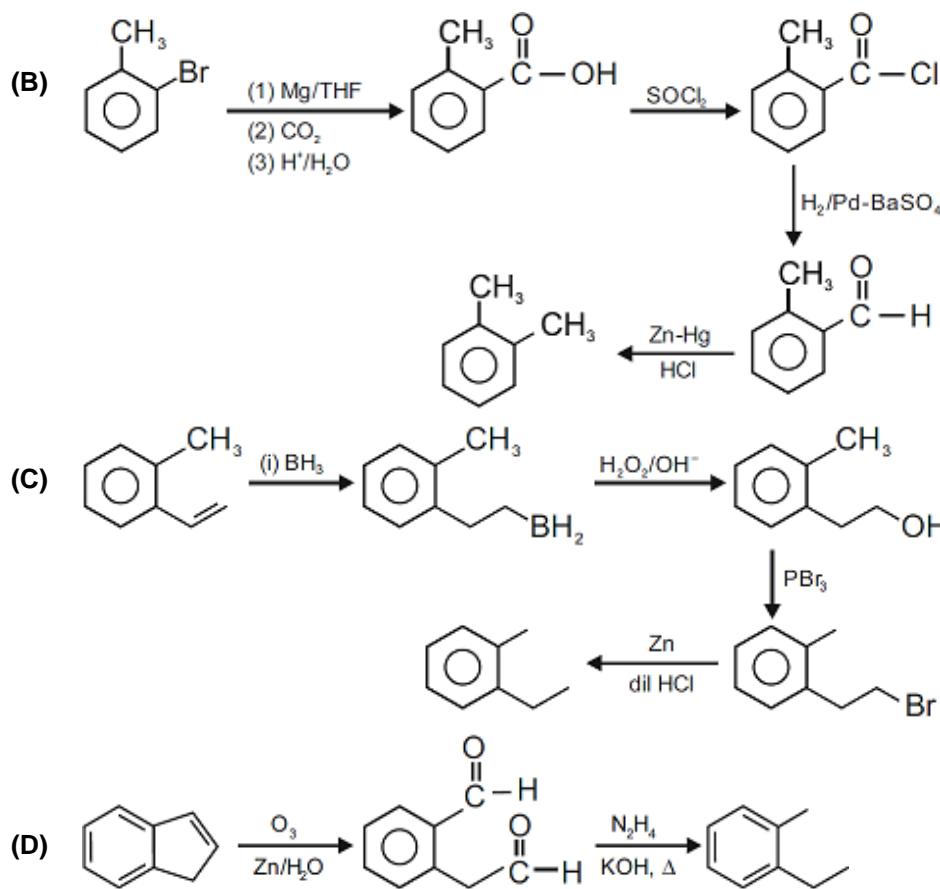
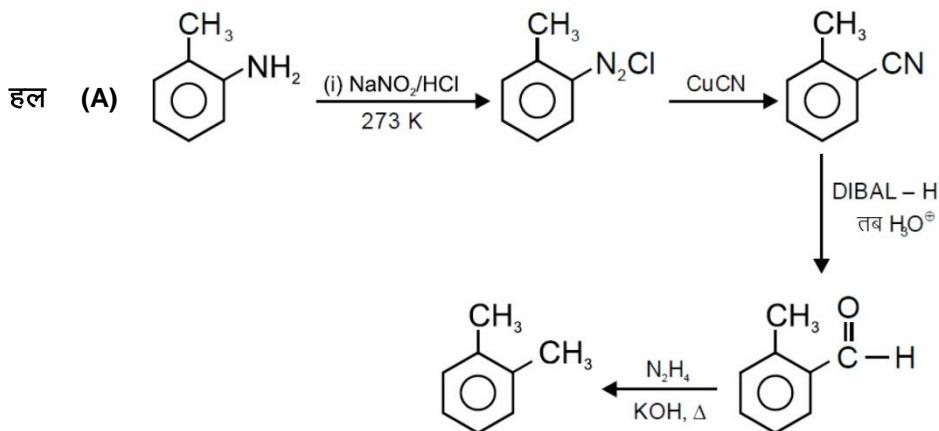
किसी भी विकल्प (विकल्पों) का चयन न किए जाने पर (अर्थात् अनुचित प्रश्न) 0 अंक प्राप्त होगा तथा

किसी भी अन्य विकल्पों के चुने जाने पर -2 अंक प्राप्त होंगे।

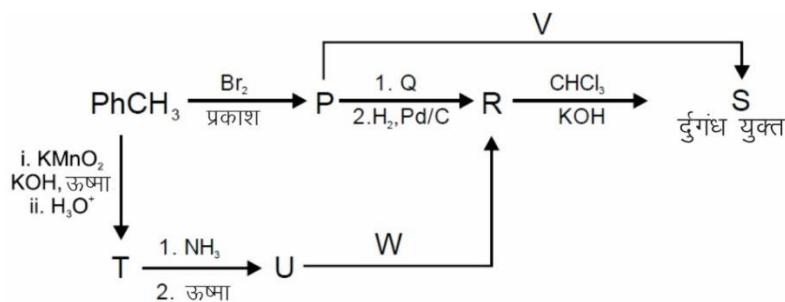
- कौनसे अभिक्रिया अनुक्रम/अनुक्रमों के परिणामस्वरूप मुख्य उत्पाद के रूप में o-जाइलीन प्राप्त होता है/है?



उत्तर (A, B)



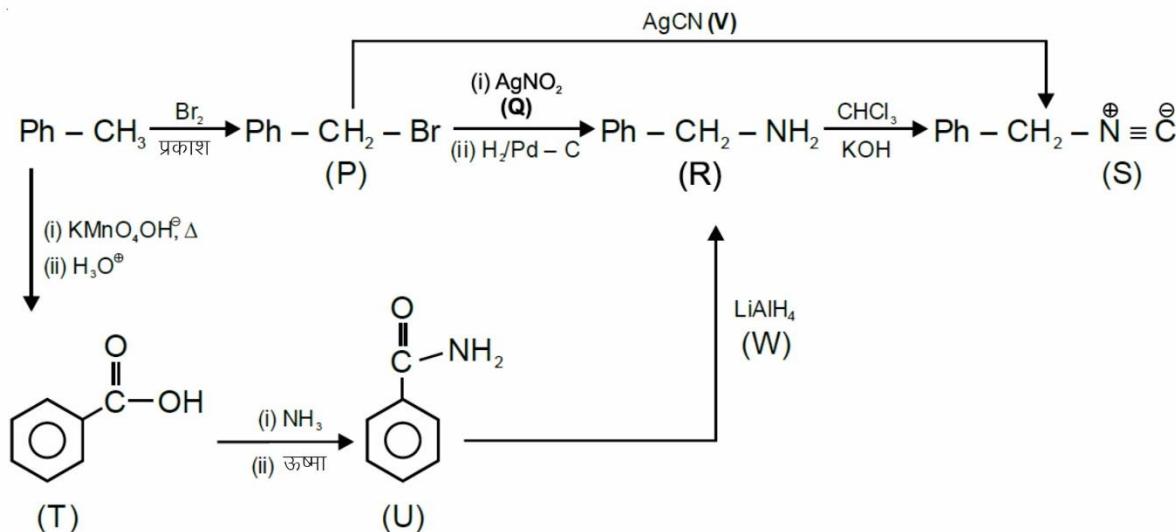
2. निम्नलिखित अभिक्रिया अनुक्रम के लिए सही विकल्प है / हैं



- (A) Q = KNO_2 , W = LiAlH_4
(B) R = बैन्जीनैमीन, V = KCN
(C) Q = AgNO_2 , R = फेनिलमेथैनैमीन
(D) W = LiAlH_4 , V = AgCN

उत्तर (C, D)

हल

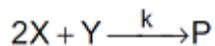


∴ सही विकल्प हैं

Q = AgNO_2 , R = फेनिलमेथैनैमीन

W = LiAlH_4 , V = AgCN

3. निम्नलिखित अभिक्रिया के लिए



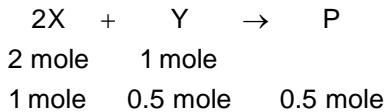
अभिक्रिया का वेग $\frac{d[P]}{dt} = k[X]^2$ है। दो मोल X तथा एक मोल Y को मिलाकर 1.0 L विलयन बनाया जाता है। 50 s पर अभिक्रिया मिश्रण में 0.5 मोल Y शेष रहता है। अभिक्रिया के सन्दर्भ में सही कथन हैं/हैं

($\ln 2 = 0.693$ का उपयोग कीजिए)

- (A) अभिक्रिया का वेग नियतांक $k = 13.86 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ है
(B) X की अर्द्ध आयु 50 s है
(C) 50 s पर, $-\frac{d[X]}{dt} = 13.86 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$.
(D) 100 s पर, $-\frac{d[Y]}{dt} = 3.46 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$.

उत्तर (B, C, D)

$$\text{हल वेग} = \frac{d[P]}{dt} = k[X]$$



$$-\frac{d[X]}{dt} = k_1[X] = 2k[X] \Rightarrow 2k = k_1$$

$$-\frac{d[Y]}{dt} = k_2[X] = k[X] \Rightarrow k_2 = k$$

$$2k = \frac{1}{50} \ln 2$$

$$k = \frac{1}{100} \ln 2 = \frac{0.693}{100} = 6.93 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$(t_{1/2})_x = \frac{\ln 2}{k_1} = \frac{\ln 2 \times 100}{2 \times 0.693} = 50 \text{ sec}$$

50 सेकण्ड पर

$$-\frac{d[X]}{dt} = 2k[X] = 2 \times \frac{0.693}{100} \times 1 = 13.86 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

100 सेकण्ड पर

$$-\frac{d[Y]}{dt} = k_2[X] = k[X] = \frac{0.693}{100} \times \frac{1}{2} \quad (\because 2 \text{ अर्ध आयु के बाद } X \text{ की सान्द्रता} = \frac{1}{2} \text{ M})$$

$$= 3.46 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

4. नीचे 298 K पर कुछ मानक इलेक्ट्रॉड विभव दिये गये हैं

Pb²⁺/Pb -0.13 V

Ni²⁺/Ni -0.24 V

Cd²⁺/Cd -0.40 V

Fe²⁺/Fe -0.44 V

0.001 M X²⁺ तथा 0.1 M Y²⁺ युक्त विलयन में धातु की छड़ X तथा Y को प्रविष्ट कराया जाता है (298 K पर) तथा इसे चालक तार द्वारा संयोजित किया जाता है। इसके परिणामस्वरूप X का विघटन होता है। X तथा Y के सही संयोजन क्रमशः हैं / हैं

(दिया है : गैस नियतांक, R = 8.314 J K⁻¹ mol⁻¹, फैराडे नियतांक, F = 96500 C mol⁻¹)

(A) Cd तथा Ni

(B) Cd तथा Fe

(C) Ni तथा Pb

(D) Ni तथा Fe

उत्तर (A, B, C)

हल $X + Y^{2+} \rightarrow X^{2+} + Y$

$$E = E^\circ - \frac{0.06}{2} \log_{10} \left(\frac{10^{-3}}{10^{-1}} \right)$$

$$E = E^\circ + 0.06$$

- (A) $E^\circ = -(-.4) + (-.24) = .16 > 0$
(B) $E^\circ = -(-.4) + (-.44) = -.04 < 0$ तथा $E_{\text{सेल}} = -0.04 + 0.06 = +0.02 > 0$
(C) $E^\circ = -(-.24) + (-.13) = .11 > 0$
(D) $E^\circ = -(-.24) + (-.44) = -.2 < 0$

$$\therefore E_{\text{सेल}} = -0.2 + 0.06 = -0.14 < 0$$

\therefore यदि $E_{\text{सेल}} > 0$ हो, तो सेल का निर्माण संभव है

5. किस युग्म में दोनों संकुल चतुष्फलकीय ज्यामिति दर्शाते हैं/हैं?

(नोट: py = पिरिडीन,

दिया है : Fe, Co, Ni तथा Cu के परमाणु क्रमांक क्रमशः 26, 27, 28 तथा 29 हैं)

- (A) $[\text{FeCl}_4]^-$ तथा $[\text{Fe}(\text{CO})_4]^{2-}$
(B) $[\text{Co}(\text{CO})_4]^-$ तथा $[\text{CoCl}_4]^{2-}$
(C) $[\text{Ni}(\text{CO})_4]$ तथा $[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{2-}$
(D) $[\text{Cu}(\text{py})_4]^+$ तथा $[\text{Cu}(\text{CN})_4]^{3-}$

उत्तर (A, B, D)

हल $[\text{FeCl}_4]^- \rightarrow \text{Fe}^{3+}, 3d^6$ (दुर्बल क्षेत्र लीगेण्ड) = sp^3

$[\text{Fe}(\text{CO})_4]^{2-} \rightarrow \text{Fe}^{2-}, 3d^{10} \rightarrow sp^3$

$[\text{Co}(\text{CO})_4]^- \rightarrow \text{Co}^-, 3d^{10} \rightarrow sp^3$

$[\text{CoCl}_4]^{2-} \rightarrow \text{Co}^{2+}, 3d^7$ (दुर्बल क्षेत्र लीगेण्ड) $\rightarrow sp^3$

$[\text{Ni}(\text{CO})_4] \rightarrow \text{Ni}, 3d^{10} \rightarrow sp^3$

$[\text{Ni}(\text{CN})_4]^{2-} \rightarrow \text{Ni}^{2+}, 3d^8$ (प्रबल क्षेत्र लीगेण्ड) $\rightarrow dsp^2$

$[\text{Cu}(\text{py})_4]^+ \rightarrow \text{Cu}^+, 3d^{10} \rightarrow sp^3$

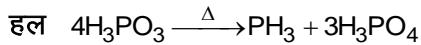
$[\text{Cu}(\text{CN})_4]^{3-} \rightarrow \text{Cu}^+, 3d^{10} \rightarrow sp^3$

$3d^{10}$ इलेक्ट्रॉनीय विन्यास में केवल sp^3 संकरण तथा चतुष्फलकीय ज्यामिति है।

6. फॉस्फोरस के ऑक्सोअम्लों से सम्बन्धित सही कथन हैं/हैं

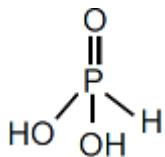
- (A) गर्म करने पर, H_3PO_3 असमानुपातन अभिक्रिया देता है तथा इसमें H_3PO_4 व PH_3 प्राप्त होता है।
(B) H_3PO_3 अपचायक की तरह कार्य कर सकता है जबकि H_3PO_4 अपचायक की तरह कार्य नहीं कर सकता
(C) H_3PO_3 एककक्षारकीय अम्ल है
(D) H_3PO_3 में P-H बंध का H-परमाणु जल में आयननीय नहीं है

उत्तर (A, B, D)



H_3PO_4 में फॉस्फोरस उच्चतम ऑक्सीकरण अवस्था अर्थात् +5 में है। अतः H_3PO_4 अपचायक के रूप में कार्य नहीं कर सकता।

H_3PO_3 की संरचना,



यह द्विक्षारकीय अम्ल है।

P-H बंध में उपस्थित H-परमाणु आयननीय नहीं है।

ये P-H बंध आयनित होकर H^+ नहीं देते तथा क्षारकता में इनकी कोई भूमिका नहीं है। केवल P-OH रूप में ऑक्सीजन के साथ जुड़े H परमाणु आयननीय होते हैं तथा इनके कारण क्षारकता होती है। अतः H_3PO_3 तथा H_3PO_4 क्रमशः द्विक्षारकीय तथा त्रिक्षारकीय हैं क्योंकि H_3PO_3 की संरचना में दो P-OH बंध तथा H_3PO_4 में तीन P-OH होते हैं।

खंड - 2

- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न अनुच्छेद हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न अनुच्छेद से संबंधित **दो (02)** प्रश्न दिए गए हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक **संख्यात्मक मान** है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही संख्यात्मक मान को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिह्नित स्थान पर दर्ज करें।
 - यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो संख्यात्मक मान को/का दशमलव के दो स्थानों तक संक्षिप्त/सन्निकटन करें।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा।
- | | | |
|-----------|------|--|
| पूर्ण अंक | : +2 | यदि चिह्नित स्थान पर सिर्फ सही संख्यात्मक मान ही दर्ज किया गया है। |
| शून्य अंक | : 0 | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के लिए अनुच्छेद

प्रश्न अनुच्छेद

298 K पर, एक दुर्बल एकक्षारकीय अम्ल की सीमान्त मोलर चालकता $4 \times 10^2 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ है। 298 K पर अम्ल के जलीय विलयन के वियोजन की मात्रा α तथा मोलर चालकता $y \times 10^2 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ है। 298 K पर जल द्वारा 20 गुना तनु करने पर विलयन की मोलर चालकता $3y \times 10^2 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$ हो जाती है।

7. α का मान _____ है।

उत्तर (0.215)

8. y का मान _____ है।

उत्तर (0.86)

हल प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के हल

अनन्त तनुता पर HX की मोलर चालकता

$$\Lambda_m^\infty = 4 \times 10^2 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$$

सान्द्रता c_1 पर HX की मोलर चालकता = $y \times 10^2 \text{ S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$

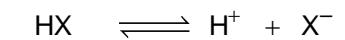
$$\alpha_1 = \frac{\Lambda_m^{c_1}}{\Lambda_m^\infty} = \frac{y \times 10^2}{4 \times 10^2} = \frac{y}{4}$$

HX के विलयन को 20 गुना तनु करने पर

$$\alpha_2 = \frac{\Lambda_m^{c_2}}{\Lambda_m^\infty} = \frac{3y \times 10^2}{4 \times 10^2} = \frac{3y}{4}$$

$$\left[c_2 = \frac{c_1}{20} \right]$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 3\alpha_1$$



$$c_1(1-\alpha_1) \quad c_1\alpha_1 \quad c_1\alpha_1$$

$$K_a = \frac{c_1\alpha_1^2}{1-\alpha_1} = \frac{c_2\alpha_2^2}{1-\alpha_2} = \frac{c_1(3\alpha_1)^2}{20(1-3\alpha_1)}$$

$$\frac{1}{1-\alpha_1} = \frac{9}{20(1-3\alpha_1)}$$

$$20 - 60\alpha_1 = 9 - 9\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{11}{51} = 0.215$$

$$y = 4\alpha_1 = 0.86$$

प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के लिए अनुच्छेद

प्रश्न अनुच्छेद

x g Sn व HCl की मात्रात्मक रूप से अभिक्रिया पर एक लवण प्राप्त होता है। HCl की आवश्यक मात्रा की उपस्थिति में लवण की सम्पूर्ण मात्रा y g नाइट्रोबेन्जीन के साथ अभिक्रिया करके 1.29 g कार्बनिक लवण (मात्रात्मक रूप से) देता है।

(H, C, N, O, Cl तथा Sn के मोलर द्रव्यमान क्रमशः (g mol⁻¹ में) 1, 12, 14, 16, 35 तथा 119 हैं)

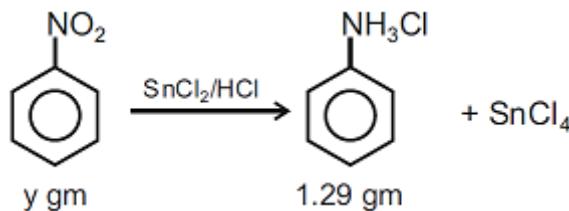
9. x का मान _____ है।

उत्तर (3.57)

10. y का मान _____ है।

उत्तर (1.23)

हल प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के हल



$$\Rightarrow \text{अमोनियम लवण के मोल} = \frac{1.29}{129} = 0.01$$

$$\Rightarrow \text{नाइट्रोबेंजीन के मोल} = 0.01$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= 0.01 \times \text{नाइट्रोबेंजीन का मोलर द्रव्यमान} \\ &= 0.01 \times 123 \\ y &= 1.23 \end{aligned}$$

और

नाइट्रोबेंजीन के तुल्यांक की संख्या = SnCl_2 के तुल्यांक की संख्या

$$6 \times (0.01) = 2 \times n_{\text{SnCl}_2}$$

$$n_{\text{SnCl}_2} = 0.03$$

$$\Rightarrow n_{\text{Sn}} = 0.03$$

$$w_{\text{Sn}} = 0.03 \times 119$$

$$x = 3.57$$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 के लिए अनुच्छेद

प्रश्न अनुच्छेद

आयरन युक्त एक नमूने (5.6 g) को ठण्डे तनु HCl में पूर्णतः घोलकर 250 mL विलयन तैयार किया गया। इस विलयन के 25.0 mL के अनुमापन में अन्तिम बिन्दु प्राप्त करने के लिए 12.5 mL, 0.03 M KMnO_4 विलयन की आवश्यकता है। 250 mL विलयन में उपस्थित Fe^{2+} के मोलों की संख्या $x \times 10^{-2}$ (माना FeCl_2 का पूर्ण वियोजन होता है) है। नमूने में उपस्थित आयरन की मात्रा भार की दृष्टि से y% है।

(माना: KMnO_4 विलयन में केवल Fe^{2+} के साथ क्रिया करता है

उपयोग करें : आयरन का मोलर द्रव्यमान 56 g mol^{-1})

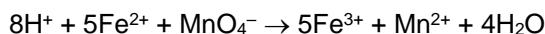
11. x का मान _____ है।

उत्तर (1.875)

12. y का मान _____ है।

उत्तर (18.75)

हल प्रश्न संख्या 11 तथा 12 के हल



25 ml के लिए,

$$\text{Fe}^{2+} \text{ के meq} = \text{MnO}_4^- \text{ के meq}$$

$$= 12.5 \times 0.03 \times 5$$

250 ml के लिए,

$$\text{Fe}^{2+} \text{ के मिलीमोल} = \frac{12.5 \times 0.03 \times 5 \times 250}{25}$$

$$\text{Fe}^{2+} \text{ के मोल} = \frac{18.75}{1000} \text{ mol}$$

$$= 18.75 \times 10^{-3} \text{ mol}$$

$$= 1.875 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

$$x = 1.875$$

$$\text{Fe}^{2+} \text{ का भार} = 1.875 \times 10^{-2} \times 56 = 1.05 \text{ g}$$

$$\text{Fe}^{2+} \text{ की \% शुद्धता} = \frac{1.05}{5.6} \times 100 = 18.75\%$$

$$y = 18.75\%$$

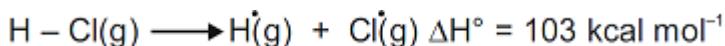
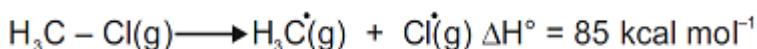
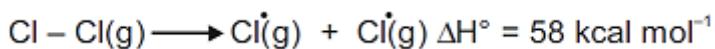
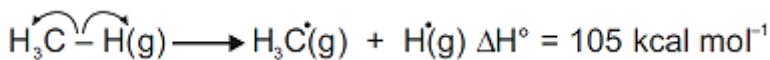
खंड - 3

- इस खंड में दो (02) अनुच्छेद हैं। प्रत्येक अनुच्छेद के आधार पर दो (02) प्रश्न दिए गए हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	:	+3	यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है।
शून्य अंक	:	0	यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है)
ऋण अंक	:	-1	अन्य सभी परिस्थितियों में।

अनुच्छेद

एक बंध को तोड़ने के लिए आवश्यक ऊर्जा की मात्रा उसी बंध के बनने में मुक्त ऊर्जा की मात्रा के समान होती है। गैसीय अवस्था में, एक बंध के समांश विदलन के लिए आवश्यक ऊर्जा बंध वियोजन ऊर्जा (BDE) या बंध सामर्थ्य कहलाती है। BDE बंध के s-लक्षण तथा प्राप्त मूलक के स्थायित्व द्वारा प्रभावित होती है। छोटे बंध प्रारूपिक रूप से प्रबल बंध होते हैं। कुछ बंधों की BDE नीचे दी गयी हैं।



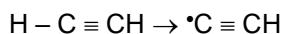
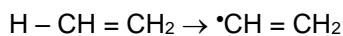
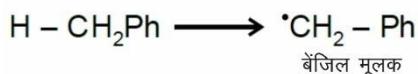
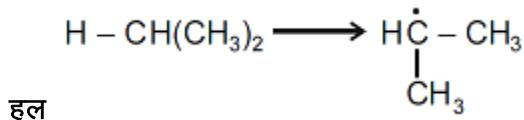
13. कॉलम **J** में दिए गए C-H बंधों (गहरे दर्शाए गए) का कॉलम **K** में इनकी BDE के साथ सही मिलान है

कॉलम J

- अणु
- (P) H-CH(CH₃)₂
 - (Q) H-CH₂Ph
 - (R) H-CH=CH₂
 - (S) H-C≡CH
 - (A) P – iii, Q – iv, R – ii, S – i
 - (B) P – i, Q – ii, R – iii, S – iv
 - (C) P – iii, Q – ii, R – i, S – iv
 - (D) P – ii, Q – i, R – iv, S – iii

कॉलम K

BDE (kcal mol ⁻¹)
(i) 132
(ii) 110
(iii) 95
(iv) 88

उत्तर (A)


मुक्त मूलक के स्थायित्व का क्रम

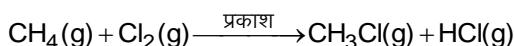
Q > P > R > S

मुक्त मूलक का स्थायित्व $\propto \frac{1}{\text{बंध ऊर्जा}}$

\therefore बंध ऊर्जा का क्रम :

S > R > P > Q

14. निम्नलिखित अभिक्रिया के लिए

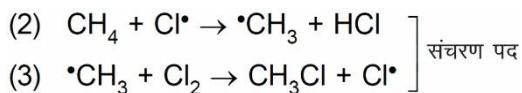


सही कथन है

- (A) प्रारम्भन पद ऊष्माक्षेपी है तथा $\Delta H^\circ = -58 \text{ kcal mol}^{-1}$ है
- (B) $\cdot\ddot{\text{C}}\text{H}_3$ निर्माण वाला संचरण पद ऊष्माक्षेपी है तथा $\Delta H^\circ = -2 \text{ kcal mol}^{-1}$ है
- (C) CH_3Cl निर्माण वाला संचरण पद ऊष्माशोषी है तथा $\Delta H^\circ = +27 \text{ kcal mol}^{-1}$ है
- (D) अभिक्रिया ऊष्माक्षेपी है तथा $\Delta H^\circ = -25 \text{ kcal mol}^{-1}$ है

उत्तर (D)

हल (1) $\text{Cl}_2 \rightarrow 2\text{Cl}^\bullet$ (प्रारम्भन पद) $\Delta H = 58 \text{ kcal/mol}$

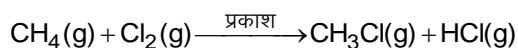


पद (1) \rightarrow ऊष्माशोषी (बंध का टूटना)

पद (2) $\rightarrow \Delta H = 105 - 103 = 2 \text{ kcal/mol}$ (ऊष्माशोषी)

पद (3) $\rightarrow \Delta H = 58 - 85 = -27 \text{ kcal/mol}$ (ऊष्माक्षेपी)

पूर्ण अभिक्रिया के लिए



$$\Delta H = 58 + 105 - 85 - 103$$

$$= -25 \text{ kcal/mol}$$

अनुच्छेद

$\text{K}_3[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ की ताजे बने FeSO_4 विलयन के साथ अभिक्रिया पर गहरे नीले रंग का अवक्षेप बनता है जो टर्नबुल्स ब्लू कहलाता है। वायु की पूर्ण अनुपस्थिति में $\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ की FeSO_4 विलयन के साथ अभिक्रिया पर सफेद अवक्षेप X प्राप्त होता है जो वायु में नीला हो जाता है। FeSO_4 विलयन को NaNO_3 के साथ मिलाकर व बाद में परखनली की दीवार के साथ—साथ धीरे—धीरे सांद्र H_2SO_4 मिलाने पर भूरी वलय बनती है।

15. अवक्षेप X है

- | | |
|---|--|
| (A) $\text{Fe}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]_3$ | (B) $\text{Fe}[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ |
| (C) $\text{K}_2\text{Fe}[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ | (D) $\text{KFe}[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ |

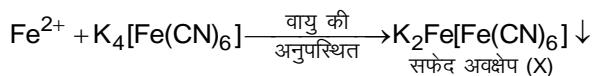
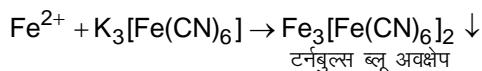
उत्तर (C)

16. निम्नलिखित में से भूरी वलय किसके निमार्ण के कारण बनती है?

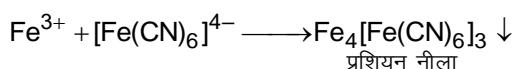
- | | |
|--|---|
| (A) $[\text{Fe}(\text{NO})_2(\text{SO}_4)_2]^{2-}$ | (B) $[\text{Fe}(\text{NO})_2(\text{H}_2\text{O})_4]^{3+}$ |
| (C) $[\text{Fe}(\text{NO})_4(\text{SO}_4)_2]$ | (D) $[\text{Fe}(\text{NO})(\text{H}_2\text{O})_5]^{2+}$ |

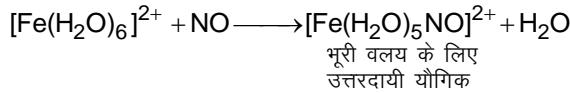
उत्तर (D)

हल प्रश्न संख्या 15 तथा 16 के हल



Fe^{2+} वायु में Fe^{3+} में ऑक्सीकृत हो जाता है





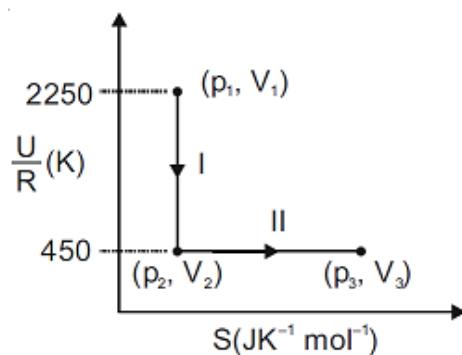
$$\therefore X = \text{K}_2\text{Fe}[\text{Fe}(\text{CN})_6]$$

भूरी वलय $[\text{Fe}(\text{H}_2\text{O})_5\text{NO}]^{2+}$ के कारण होती है।

खंड - 4

- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अ-ऋणात्मक पूर्णांक है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्युमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिन्हित स्थान पर उत्तर दर्ज कीजिए।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:
- | | | |
|-----------|------|--|
| पूर्ण अंक | : +4 | यदि केवल सही पूर्णांक मान ही दर्ज किया गया है। |
| शून्य अंक | : 0 | अन्य सभी परिस्थितियों में |

17. 900 K पर एक मोल आदर्श गैस दो उत्क्रमणीय प्रक्रमों से गुजरती है, नीचे दर्शाए अनुसार प्रक्रम I के बाद प्रक्रम II सम्पन्न होता है। यदि दोनों प्रक्रमों में गैस द्वारा किये गये कार्य समान हैं, तो $\ln \frac{V_3}{V_2}$ का मान _____ है।



(U: आन्तरिक ऊर्जा, S: एन्ट्रॉपी, p: दाब, V: आयतन, R: गैस नियतांक)

(दिया है : नियत आयतन पर गैस की मोलर ऊष्मा धारिता, $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$ है)

उत्तर (10)

हल प्रक्रम I रुद्धोष्म उत्क्रमणीय है

प्रक्रम II उत्क्रमणीय समतापीय प्रक्रम है

प्रक्रम I - (रुद्धोष्म उत्क्रमणीय)

$$\frac{\Delta U}{R} = 450 - 2250$$

$$\Delta U = -1800R$$

$$W_I = \Delta U = -1800R$$

प्रक्रम II - (उत्क्रमणीय समतापीय प्रक्रम)

$$T_1 = 900 \text{ K}$$

उत्क्रमणीय रुद्धोष प्रक्रम के बाद T_2 की गणना

$$-1800R = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$-1800R = 1 \times \frac{5}{2}R(T_2 - 900)$$

$$T_2 = 180 \text{ K}$$

$$W_{II} = -nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = W_I$$

$$\Rightarrow -1 \times R \times 180 \ln \frac{V_3}{V_2} = -1800R$$

$$\ln \frac{V_3}{V_2} = 10$$

18. हीलियम (He) परमाणु पर विचार कीजिए जो 330 nm तरंगदैर्घ्य का फोटॉन अवशोषित करता है। फोटॉन अवशोषण के बाद He परमाणु के वेग में परिवर्तन (cm s^{-1} में) _____ है।

(माना : फोटॉन के अवशोषण पर संवेग संरक्षित रहता है, प्लांक नियतांक $= 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s}$, आवोगाद्रो संख्या $= 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, He का मोलर द्रव्यमान $= 4 \text{ g mol}^{-1}$)

उत्तर (30)

$$\text{हल} \quad \text{फोटॉन का संवेग} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.6 \times 10^{-27}}{330 \times 10^{-7}} \text{ gm cm s}^{-1}$$

$$1 \text{ मोल He-परमाणुओं का संवेग} = m\Delta v$$

$$\therefore m\Delta v = N_A \times \frac{h}{\lambda}$$

$$4 \times \Delta v = \frac{6 \times 10^{23} \times 6.6 \times 10^{-27}}{330 \times 10^{-7}}$$

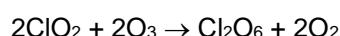
$$\Delta v = \frac{6 \times 6.6 \times 10^2}{33 \times 4} = 30 \text{ cm s}^{-1}$$

$$\therefore \text{He-परमाणुओं के वेग में परिवर्तन} = 30 \text{ cm s}^{-1}$$

19. ClO_2 के ओजोनीअपघटन पर क्लोरीन का ऑक्साइड प्राप्त होता है। इस ऑक्साइड में क्लोरीन की औसत ऑक्सीकरण अवस्था _____ है।

उत्तर (6)

हल ClO_2 में विषम इलेक्ट्रॉन होता है तथा यह अनुचुम्बकीय होता है। यह ओजोन के साथ क्रिया करके O_2 व Cl_2O_6 देता है।



Cl_2O_6 में Cl की औसत ऑक्सीकरण अवस्था +6 है।

MATHEMATICS

खंड - 1

- इस खंड में छः (06) प्रश्न हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए, चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए विकल्पों में से सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है;
आंशिक अंक	: +3	यदि चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;
आंशिक अंक	: +2	यदि तीन या तीन से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है और दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;
आंशिक अंक	: +1	यदि दो या दो से अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;
शून्य अंक	: 0	यदि प्रश्न अनुत्तरित है;
ऋण अंक	: -2	अन्य सभी परिस्थितियों में।
- उदाहरण के लिए, एक प्रश्न में यदि (A), (B) तथा (D) सही उत्तरों से संबंधित केवल तीन विकल्प हैं, तो केवल (A), (B) तथा (D) के चुने जाने पर +4 अंक प्राप्त होंगे;
- केवल (A) तथा (B) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
- केवल (A) तथा (D) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
- केवल (B) तथा (D) के चुने जाने पर +2 अंक प्राप्त होंगे;
- केवल (A) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
- केवल (B) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
- केवल (D) के चुने जाने पर +1 अंक प्राप्त होगा;
- किसी भी विकल्प (विकल्पों) का चयन न किए जाने पर (अर्थात् अनुत्तरित प्रश्न) 0 अंक प्राप्त होगा तथा
- किसी भी अन्य विकल्पों के चुने जाने पर -2 अंक प्राप्त होंगे।

1. माना $S_1 = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$,

$$S_2 = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq 10, i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}\},$$

$$S_3 = \{(i, j, k, l) : 1 \leq i < j < k < l, i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, 10\}\},$$

तथा $S_4 = \{(i, j, k, l) : i, j, k \in \{1, 2, \dots, 10\}\}$ में भिन्न अवयव हैं

यदि समुच्चय S_r में अवयवों की कुल संख्या $n_r, r = 1, 2, 3, 4$ है, तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

(A) $n_1 = 1000$

(B) $n_2 = 44$

(C) $n_3 = 220$

(D) $\frac{n_4}{12} = 420$

उत्तर (A, B, D)

हल S_1 में अवयवों की संख्या $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$

S_2 में अवयवों की संख्या $= 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44$

S_3 में अवयवों की संख्या $= {}^{10}C_4 = 210$

S_4 में अवयवों की संख्या $= {}^{10}P_4 = 210 \times 4! = 5040$

2. एक त्रिभुज PQR पर विचार कीजिए जिसके कोण P, Q व R की सम्मुख भुजाओं की लम्बाईयाँ क्रमशः p, q व r हैं। तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

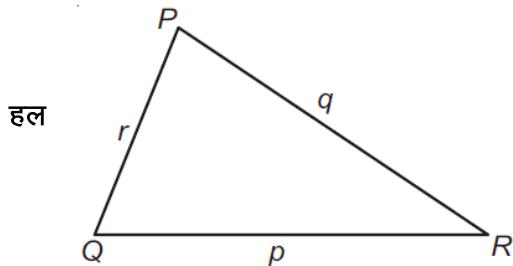
(A) $\cos P \geq 1 - \frac{p^2}{2qr}$

(B) $\cos R \geq \left(\frac{q-r}{p+q} \right) \cos P + \left(\frac{p-r}{p+q} \right) \cos Q$

(C) $\frac{q+r}{p} < 2 \frac{\sqrt{\sin Q \sin R}}{\sin P}$

(D) यदि $p < q$ तथा $p < r$, तब $\cos Q > \frac{p}{r}$ तथा $\cos R > \frac{p}{q}$

उत्तर (A, B)



$$\cos P = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2qr} \text{ तथा } \frac{q^2 + r^2}{2} \geq \sqrt{q^2 \cdot r^2} \quad (\text{स. मा.} \geq \text{गु. मा.})$$

$$\Rightarrow q^2 + r^2 \geq 2qr$$

$$\text{इसलिए, } \cos P \geq \frac{2qr - p^2}{2qr}$$

$$\cos P \geq 1 - \frac{p^2}{2qr} \quad (\text{A})$$

$$\begin{aligned} (\text{B}) \quad \frac{(q-r)\cos P + (p-r)\cos Q}{p+q} &= \frac{(q\cos P + p\cos Q) - r(\cos P + \cos Q)}{p+q} \\ &= \frac{r(1-\cos P - \cos Q)}{p+q} = \frac{r(q-p\cos R) - (p-q\cos R)}{p+q} = \frac{(r-p-q) + (p+q)\cos R}{p+q} \\ &= \cos R + \frac{r-q-p}{p+q} \leq \cos R \quad (\because r < p+q) \end{aligned}$$

$$(\text{C}) \quad \frac{q+r}{p} = \frac{\sin Q + \sin R}{\sin P} \geq \frac{2\sqrt{\sin Q \cdot \sin R}}{\sin P}$$

(D) यदि $p < q$ तथा $q < r$

इसलिए, p सबसे छोटी भुजा है, फलस्वरूप Q या R में से कोई एक अधिककोण होगा

अतः $\cos Q$ या $\cos R$ में से कोई एक ऋणात्मक होगा

फलस्वरूप $\cos Q > \frac{p}{r}$ व $\cos R > \frac{p}{q}$ सदैव मान्य नहीं हो सकते हैं।

3. माना $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ एक सतत फलन है जबकि $f(0) = 1$ तथा $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt = 0$

तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

(A) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में समीकरण $f(x) - 3 \cos 3x = 0$ का कम से कम एक हल है

(B) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में समीकरण $f(x) - 3 \sin 3x = -\frac{6}{\pi}$ का कम से कम एक हल है

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t)dt}{1 - e^{x^2}} = -1$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \int_0^x f(t)dt}{x^2} = -1$

उत्तर (A, B, C)

$$\text{हल } f(0) = 1, \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t)dt = 0$$

(A) एक फलन $g(x) = \int_0^x f(t)dt - \sin 3x$ पर विचार कीजिए

$g(x)$ सतत एवं अवकलनीय फलन है

और $g(0) = 0$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

रोल की प्रमेय द्वारा $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ में $g'(x) = 0$ का कम से कम एक हल है

किन्हीं $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ के लिए $f(x) - 3 \cos 3x = 0$

(B) फलन

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt + \cos 3x + \frac{6}{\pi} x$$

पर विचार कीजिए

$h(x)$ सतत एवं अवकलनीय फलन है

तथा $h(0) = 1$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

रोल की प्रमेय द्वारा, कम से कम एक $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ के लिए $h'(x) = 0$ है

किन्हीं $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ के लिए $f(x) - 3 \sin 3x + \frac{6}{\pi} = 0$

$$(C) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt}{1 - e^{x^2}}, \left(\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \text{रूप} \right)$$

L' हॉस्पीटल नियम द्वारा

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \int_0^x f(t) dt}{-2xe^{x^2}}, \left(\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \text{रूप} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) + f(x) + f(x)}{-4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}} = \frac{0 + 2f(0)}{-0 - 2} = -1 \end{aligned}$$

$$(D) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \int_0^x f(t) dt}{x^2}, \left(\begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \text{रूप} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot f(x) + \cos x \int_0^x f(t) dt}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\cos x \cdot f(x) + \sin x \cdot f'(x) + \cos x \cdot f(x) - \sin x \cdot \int_0^x f(t) dt \right)}{2} \\ &= \frac{1+0+1-0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. किन्हीं वास्तविक संख्याओं α व β के लिए, माना $y_{\alpha,\beta}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \alpha y = xe^{\beta x}$, $y(1) = 1$ का हल है।

माना $S = \{y_{\alpha,\beta}(x) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, तब निम्न में से कौनसा/कौनसे फलन समुच्चय S से सम्बन्धित है/हैं?

$$(A) \quad f(x) = \frac{x^2}{2} e^{-x} + \left(e - \frac{1}{2} \right) e^{-x}$$

$$(B) \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} e^{-x} + \left(e + \frac{1}{2} \right) e^{-x}$$

$$(C) \quad f(x) = \frac{e^x}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \left(e - \frac{e^2}{4} \right) e^{-x}$$

$$(D) \quad f(x) = \frac{e^x}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right) + \left(e + \frac{e^2}{4} \right) e^{-x}$$

उत्तर (A, C)

$$\text{हल } \frac{dy}{dx} + \alpha y = xe^{\beta x}$$

$$\text{समाकलन गुणांक (I.F.)} = e^{\int \alpha dx} = e^{\alpha x}$$

$$\text{अतः हल है } y \cdot e^{\alpha x} = \int xe^{\beta x} \cdot e^{\alpha x} dx$$

$$ye^{\alpha x} = \int xe^{(\alpha+\beta)x} dx$$

यदि $\alpha + \beta \neq 0$

$$ye^{\alpha x} = x \frac{e^{(\alpha+\beta)x}}{(\alpha+\beta)} - \frac{e^{(\alpha+\beta)x}}{(\alpha+\beta)^2} + C$$

$$y = \frac{x e^{\beta x}}{(\alpha + \beta)} - \frac{e^{\beta x}}{(\alpha + \beta)^2} + C e^{-\alpha x}$$

$$y = \frac{e^{\beta x}}{(\alpha + \beta)} \left(x - \frac{1}{\alpha + \beta} \right) + C e^{-\alpha x} \quad \dots (i)$$

समीकरण (i) में $\alpha = \beta = 1$ रखने पर

$$y = \frac{e^x}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C e^{-x}$$

$$y(1) = 1$$

$$1 = \frac{e}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{C}{e} \Rightarrow C = e - \frac{e^2}{4}$$

$$\text{अतः, } y = \frac{e^x}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \left(e - \frac{e^2}{4} \right) e^{-x}$$

यदि $\alpha + \beta = 0$ तथा $\alpha = 1$

$$\frac{dy}{dx} + y = x e^{-x}$$

समाकलन गुणांक = e^x

$$y e^x = \int x dx$$

$$y e^x = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^2}{2} e^{-x} + C e^{-x}$$

$$y(1) = 1$$

$$1 = \frac{1}{2e} + \frac{C}{e} \Rightarrow C = e - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{x^2}{2} e^{-x} + \left(e - \frac{1}{2} \right) e^{-x}$$

5. माना O मूलबिंदु है तथा किसी $\lambda > 0$ के लिए $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA})$ । यदि

$$|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \frac{9}{2}, \text{ तब निम्न में से कौनसा/कौनसे कथन सही है/हैं?}$$

(A) \overrightarrow{OC} का \overrightarrow{OA} पर प्रक्षेप $-\frac{3}{2}$ है

(B) त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $\frac{9}{2}$ है

(C) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $\frac{9}{2}$ है

(D) समान्तर चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाएँ \overrightarrow{OA} तथा \overrightarrow{OC} हैं, के विकर्णों के मध्य न्यून कोण $\frac{\pi}{3}$ है

उत्तर (A, B, C)

हल $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\overrightarrow{OB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \lambda \overrightarrow{OA}) = -\frac{\lambda}{2} \overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} = \frac{\lambda}{2} (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})$$

अब, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

अतः, $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \frac{3\lambda}{2}(2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

$$|\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = \left| \frac{9\lambda}{2} \right| = \frac{9}{2}$$

अतः, $\lambda = 1$ ($\because \lambda > 0$)

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(-\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$$

(A) \overrightarrow{OA} पर \overrightarrow{OC} का प्रक्षेप = $= \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\frac{1}{2}(-2 - 8 + 1)}{3} = -\frac{3}{2}$

(B) त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{9}{2}$

(C) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल है = $\frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 1 \\ -\frac{5}{2} & -4 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} |6\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}| = \frac{9}{2}$

(D) आसन्न भुजाओं \overrightarrow{OA} व \overrightarrow{OC} वाले समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के मध्य न्यूनकोण = θ

$$\frac{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})}{|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}|} = \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\left(\frac{3}{2}\hat{i} + \frac{3}{2}\hat{k} \right) \cdot \left(\frac{5}{2}\hat{i} + 4\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} \right)}{\frac{3}{2}\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{90}{4}}} = \frac{18}{3\sqrt{2}\sqrt{90}}$$

$$\theta \neq \frac{\pi}{3}$$

6. माना E परवलय $y^2 = 8x$ को निरूपित करता है। माना $P = (-2, 4)$ तथा माना Q व Q' , E पर दो भिन्न बिंदु इस प्रकार हैं कि रेखाएँ PQ व PQ' , E पर स्पर्श रेखाएँ हैं। माना F , E की नाभि है। तब निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

(A) त्रिभुज PFQ एक समकोणीय त्रिभुज है

(B) त्रिभुज QPQ' एक समकोणीय त्रिभुज है

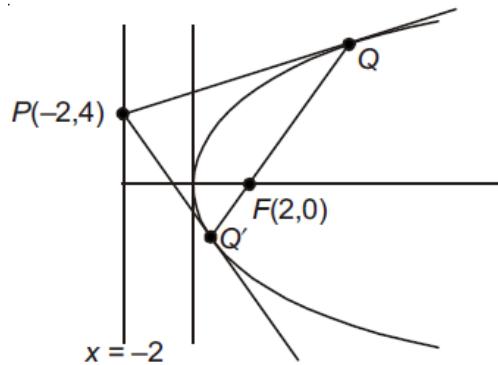
(C) P व F के मध्य दूरी $5\sqrt{2}$ है

(D) F, Q व Q' को मिलाने वाली रेखा पर स्थित है

उत्तर (A, B, D)

हल $E: y^2 = 8x$

$P: (-2, 4)$



बिंदु $P(-2, 4)$, परवलय $y^2 = 8x$ की नियता ($x = -2$) पर स्थित है

अतः, $\angle QPQ' = \frac{\pi}{2}$ तथा जीवा QQ' नाभीय जीवा है और रेखाखण्ड PQ , नाभि पर समकोण अंतरित करता है।

$$QQ'$$
 की प्रवणता $= \frac{2}{t_1 + t_2} = 1$

$$PF$$
 की प्रवणता $= -1$

$$PF = 4\sqrt{2}$$

खंड - 2

- इस खंड में तीन (03) प्रश्न अनुच्छेद हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न अनुच्छेद से संबंधित दो (02) प्रश्न दिए गए हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक संख्यात्मक मान है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही संख्यात्मक मान को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिन्हित स्थान पर दर्ज करें।
 - यदि संख्यात्मक मान में दो से अधिक दशमलव स्थान हैं, तो संख्यात्मक मान को/का दशमलव के दो स्थानों तक संक्षिप्त/सन्निकटन करें।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा।
- | | | |
|-----------|------|--|
| पूर्ण अंक | : +2 | यदि चिन्हित स्थान पर सिर्फ सही संख्यात्मक मान ही दर्ज किया गया है। |
| शून्य अंक | : 0 | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के लिए अनुच्छेद

क्षेत्र $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ तथा } y^2 \leq 4 - x\}$ पर विचार कीजिए। माना F उन सभी वृत्तों का कुल है जो R में स्थित हैं तथा जिनके केंद्र x -अक्ष पर हैं। माना C वह वृत्त है जिसकी F के वृत्तों में से सबसे बड़ी त्रिज्या है। माना (α, β) एक बिंदु है जहाँ वृत्त C , वक्र $y^2 = 4 - x$ से मिलता है।

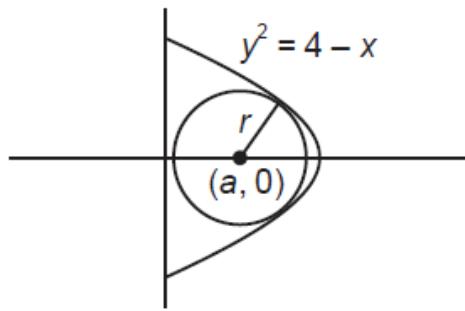
7. वृत्त C की त्रिज्या _____ है।

उत्तर (1.50)

8. α का मान _____ है।

उत्तर (2.00)

हल प्रश्न संख्या 7 तथा 8 के हल



माना वृत्त है,

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

इसे परवलय

$y^2 = 4 - x$ के साथ हल करने पर

$$(x - a)^2 + 4 - x = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x(2a + 1) + (a^2 + 4 - r^2) = 0 \quad \dots(1)$$

$$D = 0$$

$$\Rightarrow 4r^2 + 4a - 15 = 0$$

स्पष्टतः $a \geq r$

अतः $4r^2 + 4r - 15 \leq 0$

$$\Rightarrow r_{\max} = \frac{3}{2} = a$$

वृत्त C की त्रिज्या $\frac{3}{2}$ है

समीकरण (1) से $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x = 2 = a$$

प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के लिए अनुच्छेद

$$\text{माना } f_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ तथा } f_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \int_0^x \prod_{j=1}^{21} (t-j)^j dt, \quad x > 0$$

तथा $f_2(x) = 98(x-1)^{50} - 600(x-1)^{49} + 2450, x > 0$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ किसी धनात्मक पूर्णांक n तथा वास्तविक संख्याओं a_1, a_2, \dots, a_n के लिए $\prod_{i=1}^n a_i$ है, जो a_1, a_2, \dots, a_n के गुणनफल को निरूपित करता है। माना m , व n , अंतराल $(0, \infty)$ में फलन $f_i, i = 1, 2$ के क्रमशः स्थानीय निम्निष्ठ बिंदुओं तथा स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदुओं की संख्या को निरूपित करते हैं। तब

प्रश्न संख्या 9 तथा 10 के लिए हल

$$f'_1(x) = \prod_{j=1}^{21} (x-j)^j$$

$$f'_1(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \dots, (x-20)^{20}(x-21)^{21}$$

$x = 1, 2, 3, \dots, 21$ पर $f'_1(x)$ की चिन्ह पद्धति की जाँच करने पर, यहाँ

$f'_1(x)$ का $x = 1, 5, 9, 13, 17, 21$ पर स्थानीय निम्निष्ठ है तथा $x = 3, 7, 11, 15, 19$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ है

$$\Rightarrow m_1 = 6, n_1 = 5$$

$$f_2(x) = 98(x-1)^{50} - 600(x-1)^{49} + 2450$$

$$f'_2(x) = 98 \times 50(x-1)^{49} - 600 \times 49 \times (x-1)^{48}$$

$$= 98 \times 50 \times (x-1)^{48} (x-7)$$

$f_2(x)$ का $x=7$ पर स्थानीय निम्निष्ठ है तथा कोई स्थानीय उच्चिष्ठ नहीं है।

$$\Rightarrow m_2 = 1, n_2 = 0$$

9. $2m_1 + 3n_1 + m_1n_1$ का मान _____ है।

उत्तर (57.00)

हल $2m_1 + 3n_1 + m_1n_1$

$$= 2 \times 6 + 3 \times 5 + 6 \times 5$$

$$= 57$$

10. $6m_2 + 4n_2 + 8m_2n_2$ का मान _____ है।

उत्तर (06.00)

हल $6m_2 + 4n_2 + 8m_2n_2$

$$= 6 \times 1 + 4 \times 0 + 8 \times 1 \times 0 = 6$$

प्रश्न संख्या 11 तथा 12 के लिए अनुच्छेद

माना $g_i : \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \rightarrow \mathbb{R}, i=1, 2$, तथा $f : \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ फलन है जो इस प्रकार हैं कि सभी $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ के लिए

$g_1(x) = 1, g_2(x) = |4x - \pi|$ तथा $f(x) = \sin^2 x$ है। $S_i = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} f(x) \cdot g_i(x) dx, i=1, 2$ को परिभाषित कीजिए

11. $\frac{16S_1}{\pi}$ का मान _____ है।

उत्तर (02.00)

हल $S_1 = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \sin^2 x \cdot 1 dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{16S_1}{\pi} = 2$$

12. $\frac{48S_2}{\pi^2}$ का मान _____ है।

उत्तर (01.50)

$$\text{हल} \quad S_2 = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \sin^2 x \cdot |4x - \pi| dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} 4 \sin^2 x \left| x - \frac{\pi}{4} \right| dx$$

$$\text{माना } x - \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow dx = dt$$

$$S_2 = \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + t \right) |t| dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} 2(1 - \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} + t \right)) |t| dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} (2 + 2 \sin 2t) |t| dt$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} |t| dt + 2 \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} |t| \sin(2t) dt$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{8}} t dt + 0$$

$$S_2 = 2t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\Rightarrow \frac{48S_2}{\pi^2} = \frac{3}{2}$$

खंड - 3

- इस खंड में **दो (02)** अनुच्छेद हैं। प्रत्येक अनुच्छेद के आधार पर **दो (02)** प्रश्न दिए गए हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प ही सही उत्तर है।
 - प्रत्येक प्रश्न के लिए सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
 - प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:
- | | | | |
|-----------|---|----|--|
| पूर्ण अंक | : | +3 | यदि सिर्फ सही विकल्प ही चुना गया है। |
| शून्य अंक | : | 0 | यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है) |
| ऋण अंक | : | -1 | अन्य सभी परिस्थितियों में। |

अनुच्छेद

माना $M = \{(x, y) \in R \times R : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, जहाँ $r > 0$ है। गुणोत्तर श्रेणी $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ पर विचार कीजिए।

माना $S_0 = 0$ तथा $n \geq 1$ के लिए, माना S_n इस श्रेणी के प्रथम n पदों के योगफल को निरूपित करता है। $n \geq 1$ के लिए माना C_n उस वृत्त को निरूपित करता है जिसका केंद्र $(S_{n-1}, 0)$ है तथा त्रिज्या a_n है तथा D_n उस वृत्त को निरूपित करता है जिसका केंद्र (S_{n-1}, S_{n-1}) तथा त्रिज्या a_n है।

उत्तर (D)

$$\text{हल} \quad \therefore \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{तथा} \quad S_n = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

वृत्तों C_n का M में अंतःस्थित होने के लिए

$$S_{n-1} + a_n < \frac{1025}{513}$$

$$\Rightarrow S_n < \frac{1025}{513}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} < \frac{1025}{1026} = 1 - \frac{1}{1026}$$

$$\Rightarrow 2^n < 1026$$

$$\Rightarrow n \leq 10$$

∴ अंतः स्थित वृत्तों की संख्या $10 = K$ होगी

स्पष्टतः एकान्तर वृत्त एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करते हैं अर्थात् C_1, C_3, C_5, C_7, C_9 एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करते हैं इसके साथ ही C_2, C_4, C_6, C_8 व C_{10} भी एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करते हैं अतः वृत्तों के अधिकतम 5 समुच्चय एक-दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करते हैं।

$$\therefore l = 5$$

$$\therefore 3k + 2l = 40$$

∴ विकल्प D सही है।

14. M पर विचार कीजिए, जहाँ $r = \frac{(2^{199} - 1)\sqrt{2}}{2^{198}}$, तब उन सभी वृत्तों D_n की संख्या कौनसी है जो M के अंदर स्थित हैं?

उत्तर (B)

$$\text{हल} \quad \therefore \quad r = \frac{(2^{199} - 1)\sqrt{2}}{2^{198}}$$

$$\text{अब, } \sqrt{2} S_{n-1} + a_n < \left(\frac{2^{199} - 1}{2^{198}} \right) \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} < \left(\frac{2^{199}-1}{2^{198}}\right)$$

$$\therefore 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} < 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2^{198}}$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2^{198}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{2 \cdot 2^{n-2}} > \frac{\sqrt{2}}{2^{198}}$$

$$2^{n-2} < \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)2^{197}$$

$$\therefore n \leq 199$$

$$\therefore \text{वृत्तों की संख्या} = 199$$

विकल्प (B) सही है।

अनुच्छेद

माना $\psi_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ तथा $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ फलन हैं जो इस प्रकार हैं कि $f(0) = g(0) = 0$,

$$\psi_1(x) = e^{-x} + x, x \geq 0,$$

$$\psi_2(x) = x^2 - 2x - 2e^{-x} + 2, x \geq 0,$$

$$f(x) = \int_{-x}^x (|t| - t^2) e^{-t^2} dt, x > 0$$

$$\text{तथा } g(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t} e^{-t} dt, x > 0$$

15. निम्न में से कौनसा कथन सत्य है?

$$(A) f(\sqrt{\ln 3}) + g(\sqrt{\ln 3}) = \frac{1}{3}$$

(B) प्रत्येक $x > 1$ के लिए, एक $\alpha \in (1, x)$ इस प्रकार विद्यमान है कि $\psi_1(x) = 1 + \alpha x$

(C) प्रत्येक $x > 0$ के लिए एक $\beta \in (0, x)$ इस प्रकार विद्यमान है कि $\psi_2(x) = 2x(\psi_1(\beta) - 1)$

$$(D) \text{अन्तराल } \left[0, \frac{3}{2}\right] \text{ में } f \text{ एक वर्धमान फलन है}$$

उत्तर (C)

$$\text{हल } \because g(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t} e^{-t} dt, x > 0$$

$$\text{माना } t = u^2 \Rightarrow dt = 2u du$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \int_0^x u e^{-u^2} \cdot 2u du \\ &= 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \end{aligned} \quad \dots(i)$$

$$\text{तथा } f(x) = \int_{-x}^x (|t| - t^2) e^{-t^2} dt, x > 0$$

$$\therefore f(x) = 2 \int_0^x (t - t^2) e^{-t^2} dt \quad \dots(ii)$$

$$\text{समीकरण (i) + (ii) से : } f(x) + g(x) = \int_0^x 2t e^{-t^2} dt$$

$$\text{माना } \ell = P \Rightarrow 2t dt = dP$$

$$\therefore f(x) + g(x) = \int_0^{x^2} e^{-P} dP = [-e^{-P}]_0^{x^2}$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 1 - e^{-x^2} \quad \dots(\text{iii})$$

$$\therefore f(\sqrt{\ln 3}) + g(\sqrt{\ln 3}) = 1 - e^{-\ln 3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

\therefore विकल्प (A) गलत है।

$$\text{समीकरण (ii) से: } f'(x) = 2(x-x^2)e^{-x^2} = 2x(1-x)e^{-x^2}$$

$\therefore (0, 1)$ में $f(x)$ वर्धमान है।

\therefore विकल्प (D) गलत है।

$$\therefore \Psi_1(x) = e^{-x} + x$$

$$\Rightarrow \Psi'_1(x) = 1 - e^{-x} < 1, x > 1 \text{ के लिए}$$

तब $\alpha \in (1, x)$ के लिए, $\Psi_1(x) = 1 + \alpha x, \alpha > 1$ के लिए सही नहीं है।

\therefore विकल्प (B) गलत है।

$$\text{अब } \Psi_2(x) = x^2 - 2x - 2e^{-x} + 2$$

$$\Rightarrow \Psi'_2(x) = 2x - 2 + 2e^{-x}$$

$$\therefore \Psi'_2(x) = 2\Psi_1(x) - 2$$

लाग्रांज मध्य मान प्रमेय से,

$$\frac{\Psi_2(x) - \Psi_2(0)}{x - 0} = \Psi'_2(\beta), \beta \in (\infty, x) \text{ के लिए}$$

$$\Rightarrow \Psi_2(x) = 2x(\Psi_1(\beta) - 1)$$

\therefore विकल्प (C) सही है।

16. निम्न में से कौनसा कथन सत्य है?

(A) $\Psi_1(x) \leq 1$, सभी $x > 0$ के लिए

(B) $\Psi_2(x) \leq 0$, सभी $x > 0$ के लिए

(C) $f(x) \geq 1 - e^{-x^2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5$, सभी $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ के लिए

(D) $g(x) \leq \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7$, सभी $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ के लिए

उत्तर (D)

हल $\therefore \Psi_1(x) = e^{-x} + x$

तथा सभी $x > 0$ के लिए, $\Psi_1(x) > 1$

\therefore (A) सही नहीं है।

$\Psi_1(x) = x^2 + 2 - 2(e^{-x} + x) > 0, x > 0$ के लिए

\therefore (B) सही नहीं है।

$$\text{अब, } \sqrt{t} e^{-t} = \sqrt{t} \left(1 - \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right)$$

$$\text{तथा } \sqrt{t} e^{-t} \leq t^{\frac{1}{2}} - t^2 + \frac{1}{2} t^{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore \int_0^{x^2} \sqrt{t} e^{-t} dt \leq \int_0^{x^2} \left(t^{\frac{1}{2}} - t^2 + \frac{1}{2} t^{\frac{5}{2}} \right) dt \\ = \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^5 + \frac{1}{7} x^7$$

∴ विकल्प (D) सही है।

$$\text{तथा } f(x) = \int_{-x}^x (|t| - t^2) e^{-t^2} dt \\ = 2 \int_0^x (t - t^2) e^{-t^2} dt \\ = \int_0^x 2t e^{-t^2} dt - 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \\ = 1 - e^{-x^2} - 2 \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \\ \therefore f(x) \leq 1 - e^{-x^2} - 2 \int_0^x t^2 (1 - t^2) dt \\ = \text{सभी } x \left(0, \frac{1}{2} \right) \text{ के लिए } = 1 - e^{-x^2} - 2 \frac{x^3}{3} + \frac{2}{5} x^5$$

∴ विकल्प (C) गलत है।

खंड - 4

- इस खंड में **तीन (03)** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक अ-ऋणात्मक पूर्णांक है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्युमेरिक कीपैड के प्रयोग से चिन्हित स्थान पर उत्तर दर्ज कीजिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	: +4	यदि केवल सही पूर्णांक मान ही दर्ज किया गया है।
शून्य अंक	: 0	अन्य सभी परिस्थितियों में

17. समुच्चय {1, 2, 3, ..., 2000} में से एक संख्या का यादृच्छ्या चयन किया जाता है। माना चयनित संख्या के 3 या 7 का गुणज होने की प्रायिकता p है। तब $500p$ का मान _____ है।

उत्तर (214)

हल $E =$ संख्या जो 3 का गुणज या 7 का गुणज है

$$n(E) = (3, 6, 9, \dots, 1998) + (7, 14, 21, \dots, 1995) - (21, 42, 63, \dots, 1995)$$

$$n(E) = 666 + 285 - 95$$

$$n(E) = 856$$

$$n(E) = 2000$$

$$P(E) = \frac{856}{2000}$$

$$P(E) \times 500 = \frac{856}{4} = 214$$

18. माना E , दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ है। E पर किन्हीं तीन भिन्न बिंदुओं P, Q व Q' के लिए माना $M(P, Q), P$ व Q को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिंदु है तथा $M(P, Q')$, P व Q' को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिंदु है। E पर P, Q व Q' के परिवर्तन के अनुसार $M(P, Q)$ तथा $M(P, Q')$ के मध्य दूरी का अधिकतम संभावित मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर (4)

हल माना $P(\alpha), Q(\theta), Q'(\theta')$

$$M = \frac{1}{2}(4\cos\alpha + 4\cos\theta), \frac{1}{2}(3\sin\alpha + 3\sin\theta)$$

$$M' = \frac{1}{2}(4\cos\alpha + 4\cos\theta'), \frac{1}{2}(3\sin\alpha + 3\sin\theta')$$

$$MM' = \frac{1}{2}\sqrt{(4\cos\theta - 4\cos\theta')^2 + (3\sin\theta - 3\sin\theta')^2}$$

$$MM' = \frac{1}{2} \times Q \text{ व } Q' \text{ के मध्य दूरी$$

MM', P पर निर्भर नहीं है

QQ' का अधिकतम मान संभावित है जब $QQ' = \text{दीर्घअक्ष}$

$$QQ' = 2(4) = 8$$

$$MM' = \frac{1}{2} \cdot (QQ')$$

$$MM'' = 4$$

19. किसी वास्तविक संख्या x के लिए, माना $[x]$, x के बराबर या इससे कम महत्तम पूर्णांक को निरूपित करता है। यदि

$$I = \int_0^{10} \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] dx, \text{ तब } 9I \text{ का मान } \underline{\hspace{2cm}} \text{ है।}$$

उत्तर (182.00)

हल $I = \int_0^{10} \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] dx$

$$y = \frac{10x}{x+1}, \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$xy + y = 10x$$

$$x = \frac{y}{10-y}$$

$$0 \leq \frac{y}{10-y} \leq 10$$

$$\frac{y}{10-y} \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{y}{10-y} - 10 \leq 0$$

$$\frac{y}{y-10} \leq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{11y-100}{y-10} \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline 0 & & & & & \\ 10 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad \text{तथा} \quad \begin{array}{c|ccccc} & + & \bullet & - & \circ & + \\ \hline 100 & & & & & \\ 10 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

$$y \in [0, 10) \quad \text{तथा} \quad y \in \left(-\infty, \frac{100}{11}\right] \cup (10, \infty)$$

$$y \in \left[0, \frac{100}{11} \right]$$

$$\sqrt{y} \in \left[0, \frac{10}{\sqrt{11}} \right] \Rightarrow [\sqrt{y}] = \{0, 1, 2, 3\}$$

स्थिति I : $0 \leq \frac{10x}{x+1} < 1$

$$\frac{10x}{x+1} \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{10x}{x+1} - 1 < 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad 0 \end{array} \quad \text{तथा} \quad \frac{9x-1}{x+1} < 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad \frac{1}{9} \end{array}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup [0, \infty) \quad \text{तथा} \quad x \in \left(-1, \frac{1}{9} \right)$$

$$x \in \left[0, \frac{1}{9} \right] \quad \text{तब} \quad \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] = 0$$

स्थिति II : $1 \leq \frac{10x}{x+1} < 4$

$$\frac{10x}{x+1} - 1 \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{10x}{x+1} - 4 < 0$$

$$\frac{9x-1}{x+1} \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{6x-4}{x+1} < 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad \frac{1}{9} \end{array} \quad \text{तथा} \quad \begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad \frac{2}{3} \end{array}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{9}, \infty \right) \quad \text{तथा} \quad x \in \left(-1, \frac{2}{3} \right)$$

$$x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{3} \right], \quad \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] = 1$$

स्थिति III : $4 \leq \frac{10x}{x+1} < 9$

$$\frac{10x}{x+1} - 4 \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{10x}{x+1} < 9$$

$$\frac{6x-4}{x+1} \geq 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{x-9}{x+1} < 0$$

$$\begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad \frac{2}{3} \end{array} \quad \text{तथा} \quad \begin{array}{c} + - + \\ \hline -1 \quad 9 \end{array}$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{2}{3}, \infty \right) \quad x \in (-1, 9)$$

$$x \in \left[\frac{2}{3}, 9 \right] ; \quad \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] = 2$$

स्थिति IV : $x \in [9, 10] \Rightarrow \left[\sqrt{\frac{10x}{x+1}} \right] = 3$

$$I = \int_0^{\frac{1}{9}} 0 \cdot dx + \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{2}{3}} 1 \cdot dx + \int_{\frac{2}{3}}^9 2 \cdot dx + \int_9^{10} 3 \cdot dx$$

$$I = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right) + 2 \left(9 - \frac{2}{3} \right) + 3(10 - 9)$$

$$I = \frac{5}{9} + \frac{50}{3} + 3$$

$$9I = 182$$

□ □ □