



Corporate Office : Aakash Tower, 8, Pusa Road, New Delhi-110005 | Ph.: 011-47623456

Time : 3 hrs.

Max. Marks: 180

# Answers & Solutions

*for*

## JEE (Advanced)-2022 (Paper-2)

### PART-I : PHYSICS

खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में आठ (08) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, दोनों सम्मिलित की परास में एकल अंकीय पूर्णांक है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड के प्रयोग से उत्तर दर्ज करने के लिए चिह्नित स्थान पर दर्ज कीजिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही पूर्णांक ही दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि प्रश्न अनुत्तरित है;

ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में

- एक 1 kg द्रव्यमान के एक कण पर एक बल आरोपित किया जाता है जो स्थिति पर  $\vec{F} = -k(x\hat{i} + y\hat{j}) \text{ kg ms}^{-2}$  के अनुसार निर्भर करता है, जहाँ  $k = 1 \text{ kg s}^{-2}$  है। समय  $t = 0$  पर, कण की स्थिति  $\vec{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j}\right) \text{ m}$  तथा इसका वेग  $\vec{v} = \left(-\sqrt{2}\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + \frac{2}{\pi}\hat{k}\right) \text{ ms}^{-1}$  है। माना  $v_x$  तथा  $v_y$  क्रमशः कण के वेग के  $x$  तथा  $y$  घटक को प्रदर्शित करते हैं। गुरुत्व को नगय मानिये। जब  $z = 0.5 \text{ m}$ , तब  $(xv_y - yv_x)$  का मान \_\_\_\_\_  $\text{m}^2\text{s}^{-1}$  है।

उत्तर (3)

हल  $F_x = -x = ma_x$ .

$$\text{इसलिए } a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -x$$

$$\Rightarrow x = A_x \sin(\omega t + \phi_x) \quad (\omega = 1 \text{ rad/s})$$

$$\text{तथा } v_x = A_x \omega \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$t = 0 \text{ पर, } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ m तथा } v_x = -\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\text{इसलिए } \frac{1}{\sqrt{2}} = A_x \sin \phi_x$$

$$\text{तथा } -\sqrt{2} = A_x \cos \phi_x$$

$$\Rightarrow \tan \phi_x = -\frac{1}{2} \quad \dots (1)$$

$$\text{तथा } A_x = \sqrt{\frac{5}{2}} \text{ m} \quad \dots (2)$$

इसी प्रकार

$$F_y = -y = ma_y.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -y$$

$$\text{इसलिए, } y = A_y \sin(\omega t + \phi_y) \quad (\omega = 1 \text{ rad/s})$$

$$\text{तथा } v_y = A_y \omega \cos(\omega t + \phi_y)$$

$$t = 0 \text{ पर, } y = \sqrt{2} \text{ m तथा } v_y = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\text{इसलिए } \sqrt{2} = A_y \sin \phi$$

$$\text{तथा } \sqrt{2} = A_y \cos \phi$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4} \text{ तथा } A_y = 2 \quad (3 \text{ तथा } 4).$$

$$\begin{aligned} \text{इसलिए, } (xv_y - yv_x) &= \sqrt{\frac{5}{2}} \sin(\omega t + \phi_x) \times 2 \cos(\omega t + \phi_y) - 2 \sin(\omega t + \phi_y) \times \sqrt{\frac{5}{2}} \cos(\omega t + \phi_x) \\ &= \sqrt{\frac{5}{2}} \times 2 (\sin(\omega t + \phi_x) \cos(\omega t + \phi_y) - \sin(\omega t + \phi_y) \cos(\omega t + \phi_x)) \\ &= \sqrt{10} \sin(\phi_x - \phi_y) \\ &= \sqrt{10} (\sin \phi_x \cos \phi_y - \cos \phi_x \sin \phi_y) \\ &= \sqrt{10} \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

2. रेडियो सक्रिय क्षय शृंखला अभिक्रिया में,  $^{230}_{90}\text{Th}$  नाभिक  $^{214}_{84}\text{Po}$  नाभिक में क्षयित हो जाता है। इस प्रक्रम में उत्सर्जित  $\alpha$  कणों तथा  $\beta^-$  कणों की संख्या का अनुपात \_\_\_\_\_ है।

**उत्तर (2)**

हल माना  $\alpha$  कणों की संख्या  $n_\alpha$  है तथा  $\beta$  कणों की संख्या  $n_\beta$  है, इसलिए

$$4n_\alpha = 230 - 214$$

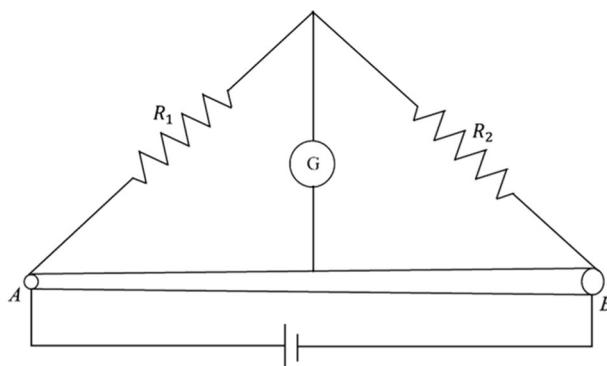
$$\Rightarrow n_\alpha = 4$$

$$n_\beta = 84 - (90 - 2n_\alpha)$$

$$n_\beta = 2$$

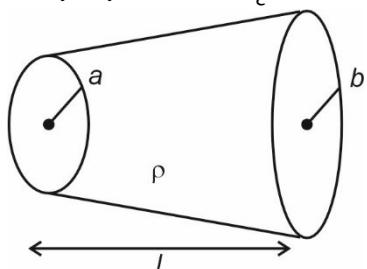
$$\text{इसलिए } \frac{n_\alpha}{n_\beta} = 2$$

3. दो प्रतिरोधों  $R_1 = X \Omega$  तथा  $R_2 = 1 \Omega$  को चित्रानुसार एकसमान प्रतिरोधकता के एक तार  $AB$  से संयोजित किया जाता है। तार की त्रिज्या इसके अक्ष के अनुदिश  $A$  पर  $0.2 \text{ mm}$  से  $B$  पर  $1 \text{ mm}$  तक रेखीय रूप से परिवर्तित होती है। इसके अक्ष के अनुदिश प्रत्येक सिरे से  $50 \text{ cm}$  पर, तार के केन्द्र से संयोजित एक गैल्वेनोमीटर ( $G$ ) शून्य विक्षेप दर्शाता है जब  $A$  तथा  $B$  को बैटरी से संयोजित किया जाता है।  $X$  का मान \_\_\_\_\_ है।



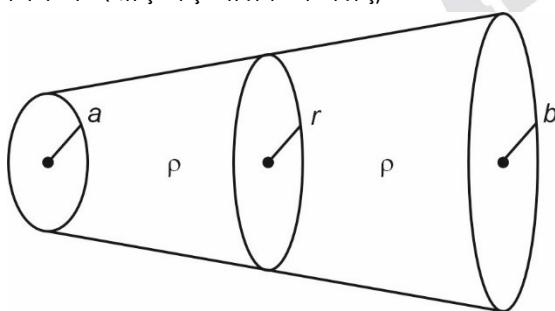
उत्तर (5)

हल दर्शाए गए छिन्क आकृति के चालक का प्रतिरोध है



$$R = \rho \frac{l}{\pi ab}$$

चित्र में दर्शाए गए चालक के लिए,



$$r = \frac{a+b}{2} = \frac{0.2+1}{2} = 0.6$$

$$\text{अतः, बायें आधे भाग का प्रतिरोध } P = \frac{\rho \times 0.5 \times 10^6}{\pi \times 0.2 \times 0.6}$$

$$\text{तथा दायें आधे भाग का प्रतिरोध } Q = \frac{\rho \times 0.5 \times 10^6}{\pi \times 0.6 \times 1}$$

क्लीटस्टोन सेतु के संतुलित होने के लिए

$$\frac{R_1}{P} = \frac{R_2}{Q}$$

$$\frac{X \pi \times 0.2 \times 0.6}{\rho \times 0.5 \times 10^6} = \frac{1 \pi \times 0.6 \times 1}{\rho \times 0.5 \times 10^6}$$

$$\Rightarrow X = 5$$

4. किसी निश्चित मात्रक पद्धति में, एक भौतिक राशि को विद्युत आवेश  $e$ , इलेक्ट्रॉन द्रव्यमान  $m_e$ , प्लांक नियतांक  $h$  तथा कूलॉम नियतांक  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  के पदों में प्रदर्शित किया जा सकता है, जहाँ  $\epsilon_0$  निर्वात की विद्युतशीलता है। इन भौतिक नियतांकों के पदों में चुम्बकीय क्षेत्र की विमा  $[B] = [e]^\alpha [m_e]^\beta [h]^\gamma [k]^\delta$  है।  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$  का मान \_\_\_\_\_ है।

उत्तर (4)

$$\text{हल } [B] = [e]^\alpha [m_e]^\beta [h]^\gamma [k]^\delta$$

$$[M^1 T^{-2} I^{-1}] = [I T]^\alpha [M]^\beta [M L^2 T^{-1}]^\gamma [M L^3 T^{-4}]^\delta$$

$$\text{इसलिए, } \beta + \gamma + \delta = 1 \quad \dots(i)$$

$$2\gamma + 3\delta = 0 \quad \dots(ii)$$

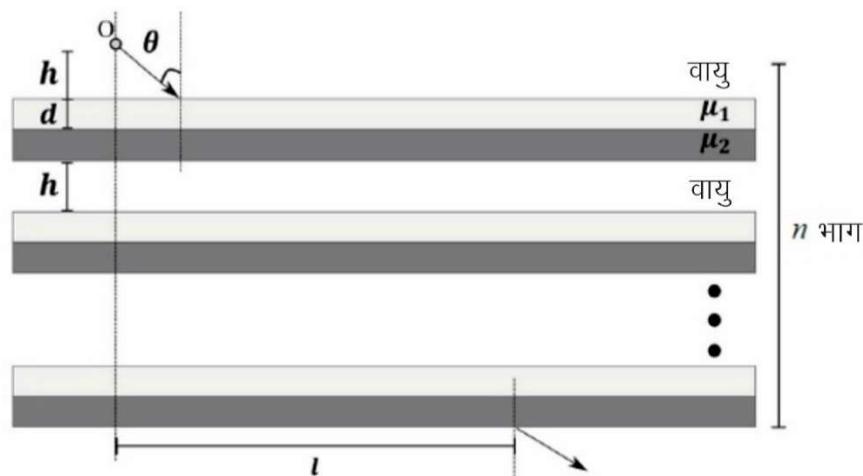
$$\alpha - \gamma - 4\delta = -2 \quad \dots(iii)$$

$$\alpha - 2\delta = -1 \quad \dots(iv)$$

हल करने पर

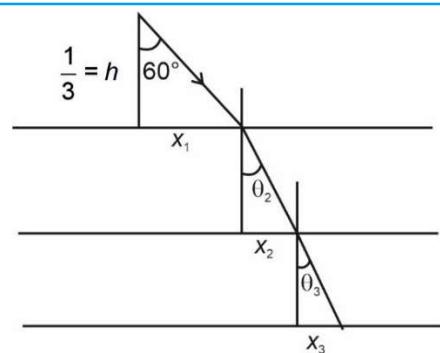
$$\text{इसलिए, } \alpha + \beta + \gamma + \delta = 4$$

5.  $n$  एक समान भाग के अभिविन्यास पर विचार कीजिए, प्रत्येक भाग में तीन परतें हैं। प्रथम परत ऊँचाई  $h = \frac{1}{3} \text{ cm}$  का वायु स्तम्भ है, तथा द्वितीय तथा तृतीय परत समान मोटाई  $d = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ cm}$ , तथा अपवर्तनांक क्रमशः  $\mu_1 = \sqrt{3}$  तथा  $\mu_2 = \sqrt{3}$  की परते हैं। एक प्रकाशित स्रोत  $O$  को चित्रानुसार प्रथम भाग के शीर्ष पर रखा जाता है। प्रकाश की एक किरण  $O$  से अभिलम्ब से  $\theta = 60^\circ$  के कोण पर प्रथम भाग की द्वितीय परत पर आपतित होती है।  $n$  के विशिष्ट मान के लिए, प्रकाश की किरण चित्रानुसार अभिविन्यास के आधार से दूरी  $l = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ cm}$  से निर्गत होती है।  $n$  का मान \_\_\_\_\_ है।



उत्तर (4)

हल



$$x_1 = \frac{1}{3} \times \tan 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$\text{तथा, } 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_2 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow x_2 = d$$

$$\text{तथा, } 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin \theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_3 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

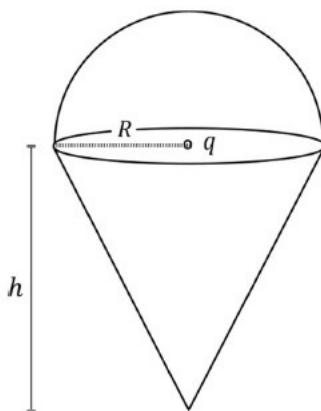
$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{3}-1)}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

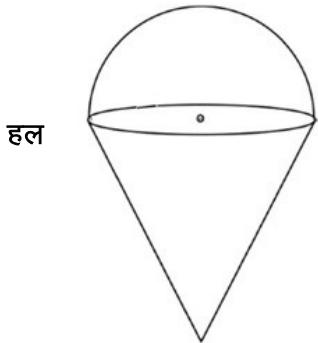
$$\therefore n = \frac{l}{x_1 + x_2 + x_3} = \frac{8/\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}} = 4$$

6. एक आवेश  $q$ ; ऊँचाई  $h$  तथा आधार त्रिज्या  $R$  के एक उल्टे शंकु तथा  $R$  त्रिज्या के एक अर्द्ध गोले से मिलकर बनी एक बंद पृष्ठ द्वारा चित्रानुसार परिबद्ध है। शंक्वाकार पृष्ठ से गुजरने वाला विद्युत फलक्स  $\frac{nq}{6\varepsilon_0}$  (SI मात्रकों में) है।  $n$  का मान

है



उत्तर (3)



हल

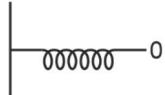
$$\text{शंकु से प्रवाहित फलक्स } \phi = \frac{q}{2\epsilon_0}$$

$$\therefore n = 3$$

7. किसी घर्षणहीन क्षैतिज तल पर, द्रव्यमान  $m = 0.1 \text{ kg}$  के एक गोलक को मूल लम्बाई  $I_0 = 0.1 \text{ m}$  की स्प्रिंग से संयोजित किया जाता है। स्प्रिंग नियतांक  $k_1 = 0.009 \text{ Nm}^{-1}$  है, जब स्प्रिंग की लंबाई  $I > I_0$  है; तथा  $k_2 = 0.016 \text{ Nm}^{-1}$  है जब  $I < I_0$  है। प्रारम्भ में गोलक को  $I = 0.15 \text{ m}$  से छोड़ा जाता है। माना कि हुक का नियम सम्पूर्ण गति के दौरान वैद्य है। यदि संपूर्ण दोलन का आवर्तकाल  $T = (n \pi) \text{ s}$  है, तब  $n$  का निकटतम पूर्णांक \_\_\_\_\_ है।

उत्तर (6)

हल



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \text{ तथा } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

$$\therefore \text{आवर्तकाल} = \pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{0.1}{0.009}} + \pi \sqrt{\frac{0.1}{0.016}}$$

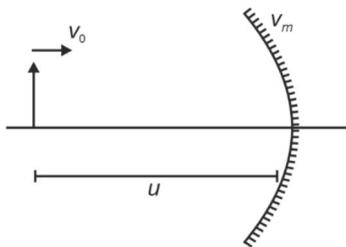
$$= \frac{\pi}{0.3} + \frac{\pi}{0.4}$$

$$= \pi \times \left( \frac{4+3}{12} \right) \times 10$$

$$= \frac{70}{12} \pi$$

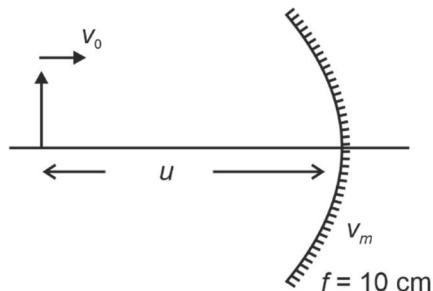
$$= 5.83\pi$$

8. एक वस्तु तथा फोकस दूरी  $f = 10 \text{ cm}$  का एक अवतल दर्पण दोनों नियत चालों से दर्पण के मुख्य अक्ष के अनुदिश गति करते हैं। वस्तु प्रयोगशाला तंत्र के सापेक्ष दर्पण की ओर चाल  $V_0 = 15 \text{ cm s}^{-1}$  से गति करती है। दिये गये क्षण पर वस्तु तथा दर्पण के मध्य दूरी को  $u$  द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जब  $u = 30 \text{ cm}$ , तब दर्पण की चाल  $V_m$  इस प्रकार है कि प्रतिबिंब प्रयोगशाला तंत्र के सापेक्ष तात्क्षणिक विराम पर होता है, तथा वस्तु एक वास्तविक प्रतिबिंब निर्मित करती है।  $V_m$  का परिमाण \_\_\_\_\_  $\text{cm s}^{-1}$  है।



उत्तर (3)

हल



$$m = \frac{f}{u-f}$$

$$= \frac{10}{30-10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (V_0 - V_m) \times m^2 - V_m = 0$$

$$\Rightarrow (V_0 - V_m) \times \frac{1}{4} = V_m$$

$$\Rightarrow V_0 = 5V_m$$

$$\Rightarrow V_m = \frac{V_0}{5}$$

$$= \frac{15}{5}$$

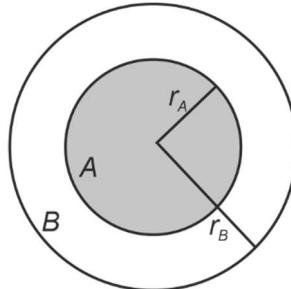
$$= 3 \text{ cm/s}$$

## खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में छ: (06) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, (सभी) सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	:	+4 यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है / हैं;
आंशिक अंक	:	+3 यदि सभी चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;
आंशिक अंक	:	+2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है, दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;
आंशिक अंक	:	+1 यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;
शून्य अंक	:	0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);
ऋण अंक	:	-2 अन्य सभी परिस्थितियों में।

9. चित्र में, आंतरिक (छायांकित) क्षेत्र  $A$  त्रिज्या  $r_A = 1$  के एक गोले को प्रदर्शित करता है जिसके अंदर स्थिरवैद्युत आवेश घनत्व केन्द्र से त्रिज्य दूरी  $r$  के साथ  $\rho_A = kr$  के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ  $k$  धनात्मक है। बाह्य त्रिज्या  $r_B$  के गोलीय कोश  $B$  में, स्थिरवैद्युत आवेश घनत्व  $\rho_B = \frac{2k}{r}$  के अनुसार परिवर्तित होता है। माना विमाओं को ध्यान में रखा जाता है। सभी भौतिक राशियाँ अपने SI मात्रकों में हैं।

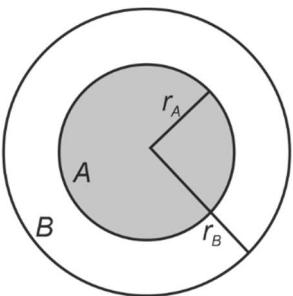


निम्न में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

- (A) यदि  $r_B = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , तब  $B$  के बाहर प्रत्येक जगह पर विद्युत क्षेत्र शून्य है
- (B) यदि  $r_B = \frac{3}{2}$ , तब  $B$  के ठीक बाहर विद्युत विभव  $\frac{k}{\epsilon_0}$  है
- (C) यदि  $r_B = 2$ , तब अभिविन्यास का कुल आवेश  $15\pi k$  है
- (D) यदि  $r_B = \frac{5}{2}$ , तब  $B$  के ठीक बाहर विद्युत क्षेत्र का परिमाण  $\frac{13\pi k}{\epsilon_0}$  है

### उत्तर (B)

हल



$$Q_{\text{कुल}} = \int_0^{r_A} kr(4\pi r^2) dr + \int_{r_A}^{r_B} \frac{2k}{r} (4\pi r^2) dr$$

$$= \frac{4\pi k}{4} r_A^4 + \frac{8\pi k}{2} (r_B^2 - r_A^2)$$

$$= \pi k + 4\pi k(r_B^2 - r_A^2)$$

$$\text{यदि } r_B = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$Q_{\text{कुल}} = \pi k r_A^4 + 4\pi k \left(\frac{3}{2} - r_A^2\right)$$

$$= \pi k + 4\pi k \left(\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$= \pi k + 2\pi k = 3\pi k$$

यदि  $r_B = \frac{3}{2}$

$$Q_{\text{कुल}} = \pi k + 4\pi k \left( \frac{9}{4} - 1 \right)$$

$$= \pi k + 4\pi k \left( \frac{5}{4} \right) = 6\pi k$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6\pi k}{r_B} = \frac{3k}{2} \frac{2}{3\epsilon_0} = \frac{k}{\epsilon_0}$$

(B) सही है

यदि  $r_B = 2$

$$Q_{\text{कुल}} = \pi k + 4\pi k (4 - 1)$$

$$= 13\pi k$$

विकल्प (C) गलत है

यदि  $r_B = \frac{5}{2}$

$$Q_{\text{कुल}} = \pi k + 4\pi k \left( \frac{25}{4} - 1 \right)$$

$$= \pi k + \pi k (21)$$

$$= 22\pi k$$

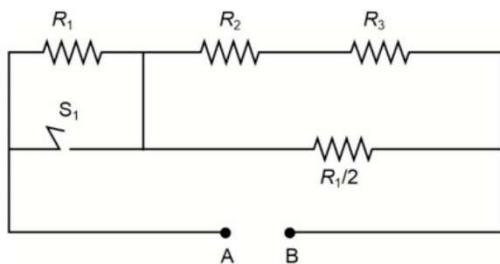
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{22\pi k}{25} \times 4$$

$$= \frac{22k}{25\epsilon_0}$$

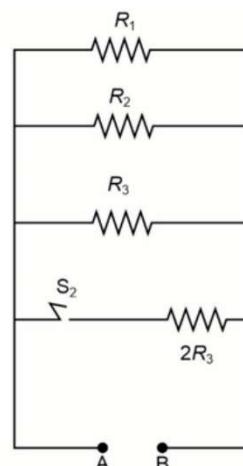
10. चित्रों में दर्शाये गये परिपथ -1 तथा परिपथ-2 में,  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$  तथा  $R_3 = 3 \Omega$  हैं।

$P_1$  तथा  $P_2$  परिपथ-1 तथा परिपथ-2 में शक्ति व्यय है जब स्विच  $S_1$  तथा  $S_2$  क्रमशः खुली रिस्थितियों में हैं।

$Q_1$  तथा  $Q_2$  परिपथ-1 तथा परिपथ-2 में शक्ति व्यय है जब स्विच  $S_1$  तथा  $S_2$  क्रमशः बंद रिस्थितियों में हैं।



परिपथ-1



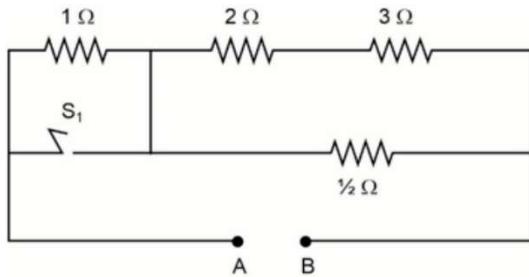
परिपथ-2

निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सही हैं / हैं?

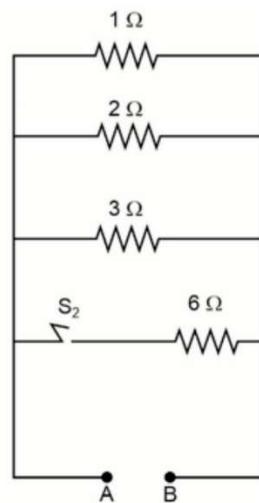
- (A) जब दोनों परिपथों में A तथा B के सिरों पर 6 V के एक वोल्टता स्रोत को संयोजित किया जाता है, तब  $P_1 < P_2$  है
- (B) जब दोनों परिपथों में A तथा B के सिरों पर 2 Amp के एक नियत धारा स्रोत को संयोजित किया जाता है, तब  $P_1 > P_2$  है
- (C) जब परिपथ-1 में A तथा B के सिरों पर 6 V के एक वोल्टता स्रोत को संयोजित किया जाता है, तब  $Q_1 > P_1$  है
- (D) जब दोनों परिपथों में A तथा B के सिरों पर 2 Amp के एक नियत धारा स्रोत को संयोजित किया जाता है, तब  $Q_2 < Q_1$  है

उत्तर (A, B, C)

हल



परिपथ-1



परिपथ-2

जब  $S_1$  तथा  $S_2$  खुले हैं

$$(R_{eq})_1 = 1 + \frac{\frac{5 \times \frac{1}{2}}{1}}{5 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{5}{11} = \frac{16}{11}$$

$$P_1 = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(6)^2}{16} \times 11 = \frac{36 \times 11}{16} = 24.75 \text{ W}$$

$$(R_{eq})_2 = \frac{6}{11} \Omega$$

$$P_2 = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(6)^2}{6} \times 11 = \frac{36 \times 11}{6} = 66 \text{ W}$$

$$P_2 > P_1$$

विकल्प (A) सही है

⇒ यदि 2 A स्रोत का उपयोग दोनों स्थितियों में किया जाता है

$$P_1 = i^2(R_{eq})_1 = (2)^2 \times \frac{16}{11} = \frac{64}{11} = 5.818 \text{ W}$$

$$P_2 = i^2(R_{eq})_2 = (2)^2 \times \frac{6}{11} = \frac{24}{11} = 2.1818 \text{ W}$$

$$P_1 > P_2$$

विकल्प (B) सही है

$Q_1$  के लिए

$$R_{eq} = \frac{5}{11} \Omega$$

$$Q_1 = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{(6)^2}{\frac{5}{11}} = \frac{36 \times 11}{5} = 79.2 \text{ W}$$

$$P_1 = 24.75 \text{ W}$$

$$Q_1 > P_1$$

विकल्प (C) सही है

विकल्प (D) के लिए

$$Q_1 = i^2 R_{eq} = (2)^2 \times \frac{5}{11} = \frac{20}{11} = 1.81 \text{ W}$$

$$Q_2 = i^2 R_{eq} = (2)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ W}$$

$$Q_2 > Q_1$$

विकल्प (D) गलत है

11. एक बुलबुले का पृष्ठ तनाव  $S$  है। बुलबुले के अंदर आदर्श गैस की विशिष्ट ऊर्जाओं का अनुपात  $\gamma = \frac{5}{3}$  है। बुलबुले को वायुमण्डल में अनावरित किया जाता है तथा यह सदैव अपनी गोलाकार आकृति बनाये रखता है। जब वायुमण्डलीय दाब  $P_{a1}$  है, तब बुलबुले की त्रिज्या  $r_1$  ज्ञात होती है तथा परिबद्ध गैस का ताप  $T_1$  है। जब वायुमण्डलीय दाब  $P_{a2}$ , तब बुलबुले की त्रिज्या तथा परिबद्ध गैस का ताप क्रमशः  $r_2$  तथा  $T_2$  हैं।

निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

(A) यदि बुलबुले का पृष्ठ आदर्श ऊर्जारोधी है, तब  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^5 = \frac{P_{a2} + \frac{2S}{r_2}}{P_{a1} + \frac{2S}{r_1}}$

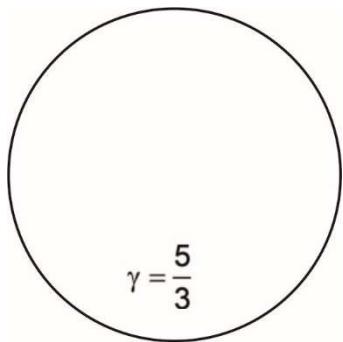
- (B) यदि बुलबुले का पृष्ठ आदर्श ऊर्जारोधी है, तब बुलबुले की कुल आंतरिक ऊर्जा (इसकी पृष्ठीय ऊर्जा के साथ) बाह्य वायुमण्डलीय दाब के साथ परिवर्तित नहीं होती है

(C) यदि बुलबुले का पृष्ठ आदर्श ऊर्जारोधी है तथा वायुमण्डलीय ताप में परिवर्तन नगण्य है, तब  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \frac{P_{a2} + \frac{4S}{r_2}}{P_{a1} + \frac{4S}{r_1}}$

(D) यदि बुलबुले का पृष्ठ आदर्श ऊर्जारोधी है, तब  $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{P_{a2} + \frac{4S}{r_2}}{P_{a1} + \frac{4S}{r_1}}$

**उत्तर (C, D)**

हल  $S$ : पृष्ठीय तनाव



$$\begin{array}{ccc} \text{दाब} & \text{त्रिज्या} & \text{ताप} \\ \text{जब, } P_{a1} & \longrightarrow & r_1 \longrightarrow T_1 \\ P_{a2} & \longrightarrow & r_2 \longrightarrow T_2 \end{array}$$

रुद्धोष्म प्रक्रम के लिए

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

$$\left(P_{a1} + \frac{4T}{r_1}\right) \left(\frac{4}{3} \pi r_1^3\right)^{\frac{5}{3}} = \left(P_{a2} + \frac{4T}{r_2}\right) \left(\frac{4}{3} \pi r_2^3\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^5 = \frac{\left(P_{a2} + \frac{4T}{r_2}\right)}{\left(P_{a1} + \frac{4T}{r_1}\right)}$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3\left(\frac{2}{3}\right)}$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{P_{a2} + \frac{4T}{r_2}}{P_{a1} + \frac{4T}{r_1}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

विकल्प (B) के लिए, कुल आंतरिक ऊर्जा + पृष्ठीय ऊर्जा समान नहीं होगी क्योंकि गैस द्वारा कार्य किया जायेगा।

विकल्प (B) गलत है

विकल्प (C) के लिए

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$$\left( P_{a1} + \frac{4T}{r_1} \right) \left( \frac{4}{3} \pi r_1^3 \right) = \left( P_{a2} + \frac{4T}{r_2} \right) \left( \frac{4}{3} \pi r_2^3 \right)$$

$$\left( \frac{r_1}{r_2} \right)^3 = \frac{\left( P_{a2} + \frac{4T}{r_2} \right)}{\left( P_{a1} + \frac{4T}{r_1} \right)}$$

विकल्प (C) सही है

12. एकसमान धनात्मक आवेश घनत्व  $\sigma$  तथा त्रिज्या  $R$  की एक डिस्क को  $xy$  तल पर इस प्रकार रखा जाता है कि इसका केन्द्र मूल बिंदु पर होता है।  $z$ -अक्ष के अनुदिश कूलॉम विभव है

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$$

धनात्मक आवेश  $\sigma$  के एक कण को प्रारंभ में विराम पर  $z$ -अक्ष पर किसी बिंदु पर इस प्रकार रखा जाता है कि  $z = z_0$  तथा  $z_0 > 0$  है। कूलॉम बल के साथ, कण एक ऊर्ध्वाधर बल  $\vec{F} = -c\hat{k}$  जहाँ  $c > 0$  अनुभव करता है। माना  $\beta = \frac{2c\epsilon_0}{q\sigma}$  है। निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

- (A)  $\beta = \frac{1}{4}$  तथा  $z_0 = \frac{25}{7}R$  के लिए, कण मूल बिंदु पर पहुंचता है
- (B)  $\beta = \frac{1}{4}$  तथा  $z_0 = \frac{3}{7}R$  के लिए, कण मूल बिंदु पर पहुंचता है
- (C)  $\beta = \frac{1}{4}$  तथा  $z_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$  के लिए, कण  $z = z_0$  पर वापस लौटता है
- (D)  $\beta > 1$  तथा  $z_0 > 0$  के लिए, कण सदैव मूल बिंदु पर पहुंचता है

उत्तर (A, C, D)

हल  $V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z)$

$$U_z = cz$$

$$\Rightarrow U(z)_{\text{नेट}} = \frac{\sigma q}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z) + cz$$

$$= c \left[ \frac{\sigma q}{2c\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - z) + z \right]$$

$$= c [4\sqrt{R^2 + z^2} - 3z]; \beta = \frac{1}{4} \text{ पर}$$

$$z = 0 \text{ पर}, \beta = \frac{1}{4}$$

$$U(z)_{\text{नेट}} = c[4R] = 4Rc \quad \dots(\text{i})$$

$$z = z_0 = \frac{25}{7}R \text{ पर}, \beta = \frac{1}{4}$$

$$U(z)_{\text{नेट}} = c \left[ 4 \times \frac{26R}{7} - 3 \times \frac{25R}{7} \right] = \frac{29}{7}Rc \quad \dots(\text{ii})$$

$$z = z_0 = \frac{3}{7}R \text{ पर}, \beta = \frac{1}{4}$$

$$U(z)_{\text{नेट}} = c \left[ 4 \times \frac{\sqrt{58}}{7}R - \frac{9R}{7} \right] \approx 3Rc \quad \dots(\text{iii})$$

$$z = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ पर}, \beta = \frac{1}{4}$$

$$U(z)_{\text{नेट}} = c \left[ \frac{8R}{\sqrt{3}} - \frac{3R}{\sqrt{3}} \right] \approx 2.887Rc$$

$\Rightarrow$  विकल्प (A) में कण धनात्मक गतिज ऊर्जा के साथ मूल बिन्दु पर पहुँचता है

$$z = \frac{3R}{\sqrt{7}} \text{ पर } \frac{dU(z)}{dz} = 0$$

$$\beta = \frac{1}{4} \text{ तथा } z = \frac{3R}{\sqrt{7}} \text{ पर}$$

$$U(z)_{\text{नेट}} = \sqrt{7}Rc = 2.645$$

$\Rightarrow$  विकल्प B में,  $U(z)_{\text{नेट}} \approx 3Rc$  पर

$\Rightarrow$  मूल बिन्दु पर गतिज ऊर्जा ऋणात्मक हो जायेगी

$$z = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ पर}$$

$\Rightarrow$  विकल्प (C) में,  $z = \frac{R}{\sqrt{3}}$  पर  $U(z)_{\text{नेट}} < z = 0$  पर  $U(z)_{\text{नेट}}$

$$\text{तथा } z = \frac{R}{\sqrt{3}} \text{ पर } U(z)_{\text{नेट}} > z = \frac{3R}{\sqrt{7}} \text{ पर } U(z)_{\text{नेट}}$$

$\Rightarrow$  कण  $z_0$  पर वापस लौटेगा

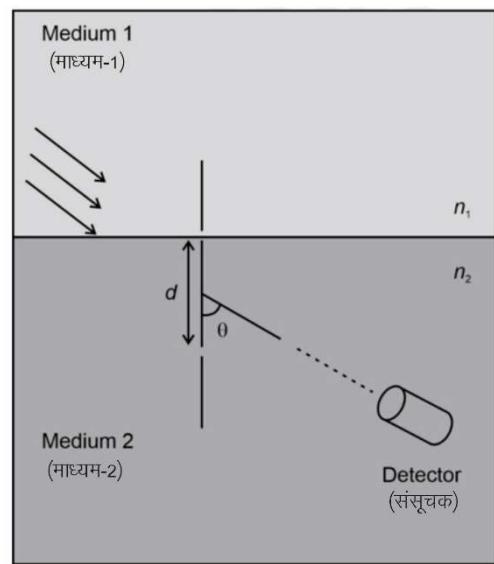
विकल्प (D) में ( $\beta > 1, z_0 > 0$ )

$U(z)_{\text{नेट}}, z$  के साथ निरंतर बढ़ेगी

$\Rightarrow$  कण सदैव मूलबिंदु पर पहुँचता है

$\Rightarrow$  उत्तर (A, C, D)

13. चित्र में एक द्विस्लिट समंजन दर्शाया गया है। कोई एक स्लिट अपवर्तनांक  $n_2$  के माध्यम 2 में है। अन्य स्लिट अपवर्तनांक  $n_1$  ( $\neq n_2$ ) के अन्य माध्यम 1 के साथ इस माध्यम के अंतराफलक पर है। स्लिटों को जोड़ने वाली रेखा अंतराफलक के लम्बवत् है तथा स्लिटों के मध्य दूरी  $d$  है। स्लिटों की चौड़ाई  $d$  से बहुत कम है। एकलवर्णीय समांतर प्रकाश पुंज माध्यम 1 से स्लिटों पर आपतित होता है। एक संसूचक को स्लिटों से अत्यधिक दूरी पर तथा इन्हें जोड़ने वाली रेखा से  $\theta$  कोण पर माध्यम 2 में इस प्रकार रखा जाता है कि  $\theta$  पुंज के अपवर्तन कोण के बराबर होता है। माना स्लिटों से दो लगभग समांतर किरणें संसूचक द्वारा प्राप्त की जाती हैं।

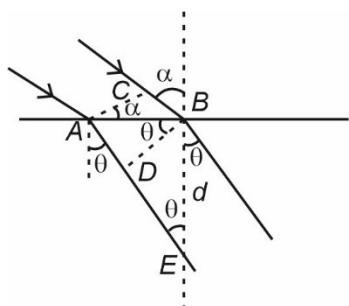


निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

- (A) दोनों किरणों के मध्य कलांतर  $d$  पर निर्भर नहीं करता है
- (B) दोनों किरणें संसूचक पर संपोषी व्यतिकरण करती हैं
- (C) दोनों किरणों के मध्य कलांतर  $n_1$  पर निर्भर करता है लेकिन  $n_2$  पर निर्भर नहीं करता है
- (D) दोनों किरणों के मध्य कलांतर केवल  $d$  तथा पुंज के आपतन कोण के निश्चित मान के लिए निरस्त होता है तथा  $\theta$  संगत अपवर्तन कोण है

उत्तर (A, B)

हल



$$AB = (d)(\tan\theta)$$

$$\text{तथा } BC = AB \sin\alpha = (d)(\tan\theta)(\sin\alpha)$$

$$\text{इसी प्रकार, } AD = AB \sin\theta$$

$\Rightarrow$  पथान्तर (निर्वात में)

$$= n_1 BC - n_2 AD$$

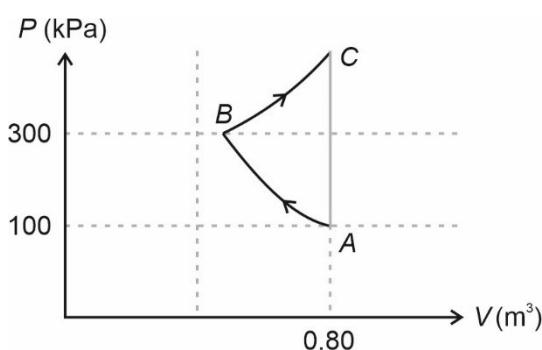
$$= n_1(AB) \sin\alpha - n_2(AB \sin\theta)$$

$$= AB (n_1 \sin\alpha - n_2 \sin\theta) = 0$$

$\Rightarrow$  (A), (B) सही हैं

(C), (D) गलत हैं

14. दिये गये  $P-V$  आरेख में, एकलपरमाणुक गैस  $\left(\gamma = \frac{5}{3}\right)$  को पहले अवस्था  $A$  से अवस्था  $B$  तक रुद्धोष्म रूप से संपीड़ित किया जाता है। फिर यह अवस्था  $B$  से अवस्था  $C$  तक समतापीय रूप से प्रसारित होती है। [दिया है:  $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.6} = 0.5, \ln 2 \approx 0.7$ ].



निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सही है / हैं?

- (A) प्रक्रम  $A \rightarrow B \rightarrow C$  में किये गये कुल कार्य का परिमाण 144 kJ है  
 (B) प्रक्रम  $B \rightarrow C$  में किये गये कार्य का परिमाण 84 kJ है  
 (C) प्रक्रम  $A \rightarrow B$  में किये गये कार्य का परिमाण 60 kJ है  
 (D) प्रक्रम  $C \rightarrow A$  में किये गये कार्य का परिमाण शून्य है

उत्तर (B, C, D)

हल  $PV^\gamma = c$

$$\Rightarrow 100(0.8)^{5/3} = 300(V)^{5/3}$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{0.8}{3^{3/5}}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = \frac{P_A V_A - P_B V_B}{\frac{5}{3} - 1} = \frac{80 - 300 \times \frac{0.8}{3^{3/5}}}{2/3} \text{ kJ}$$

$$= \frac{80 - 240(0.5)}{2/3} \text{ kJ}$$

$$= -60 \text{ kJ}$$

$\Rightarrow$  (C) सही है

$C \rightarrow A$  समआयतनिक है  $\Rightarrow$  (D) सही है

$$BC : W_{BC} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = PV \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$= 300 \times 0.8 \times 0.5 \ln \left( \frac{\frac{0.8}{0.8}}{\frac{3^{3/5}}{3}} \right)$$

$$= 120 \ln 2 = 84 \text{ kJ}$$

$\therefore$  विकल्प (B, C, D) सही हैं।

### खण्ड – 3 (अधिकतम अंक : 12)

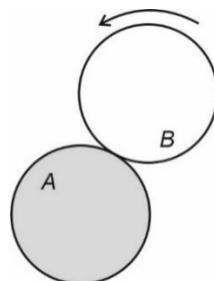
- इस खण्ड में चार (04) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही विकल्प को चुना गया है;

शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);

ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में।

15.  $R$  त्रिज्या की एक पतली एकसमान डिस्क  $A$  के समतल पृष्ठ को क्षैतिज मेज से चिपकाया जाता है। द्रव्यमान  $M$  तथा समान त्रिज्या  $R$  की अन्य पतली एकसमान डिस्क  $B$  चित्रानुसार  $A$  की परिधी पर बिना फिसले लुढ़कती है।  $B$  का समतल पृष्ठ भी मेज के तल पर स्थित है।  $A$  के केन्द्र से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष  $B$  के द्रव्यमान केन्द्र की नियत कोणीय चाल  $\omega$  है।  $A$  के केन्द्र के सापेक्ष  $B$  का कोणीय संवेग  $nM\omega R^2$  है। निम्नलिखित में से कौनसा  $n$  का मान है?



(A) 2

(B) 5

(C)  $\frac{7}{2}$

(D)  $\frac{9}{2}$

उत्तर (B)

हल A के केन्द्र के सापेक्ष B का कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{CM} \text{ के सापेक्ष घिण्ड}$$

$$= M(2R)^2 \omega \hat{k} + \frac{MR^2}{2} (\omega_{body}) \hat{k}$$

$$= M(2R)^2 \omega \hat{k} + \frac{MR^2}{2} (2\omega) \hat{k}$$

$$= 5MR^2 \omega \hat{k}$$

परिमाण की तुलना  $nM\omega R^2$  से करने पर

$$n = 5$$

16. जब दिये गये तरंगदैर्ध्य का प्रकाश एक धात्विक पृष्ठ पर आपतित होता है, तब उत्सर्जित फोटोइलेक्ट्रॉनों को रोकने के लिए आवश्यक चूनतम विभव 6.0 V है। यह विभव पतन 0.6 V होता है यदि अच्य स्रोत की तरंगदैर्ध्य प्रथम स्रोत की चार गुनी होती है तथा तीव्रता प्रथम स्रोत की आधी होती है। प्रथम स्रोत की तरंगदैर्ध्य तथा धातु का कार्यफलन क्रमशः क्या है?

$$[\frac{hc}{e} = 1.24 \times 10^{-6} \text{ J m C}^{-1} \text{ लीजिए}]$$

$$(A) 1.72 \times 10^{-7} \text{ m, } 1.20 \text{ eV}$$

$$(B) 1.72 \times 10^{-7} \text{ m, } 5.60 \text{ eV}$$

$$(C) 3.78 \times 10^{-7} \text{ m, } 5.60 \text{ eV}$$

$$(D) 3.78 \times 10^{-7} \text{ m, } 1.20 \text{ eV}$$

उत्तर (A)

$$\text{हल } h\nu - \phi = 6 \text{ eV}$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \phi = 6 \text{ eV} \quad \dots(i)$$

$$\frac{hc}{4\lambda} - \phi = 0.6 \text{ eV}$$

$$\frac{3hc}{4\lambda} = 5.4 \text{ eV}$$

$$\therefore \lambda = \frac{3hc}{4 \times 5.4 \text{ eV}} = \frac{3 \times 1.24 \times 10^{-6}}{4 \times 5.4}$$

$$= 1.72 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$\Rightarrow$  समीकरण (i) से

$$\frac{hc}{1.72 \times 10^{-7}} \times \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} - \phi = 6 \text{ eV}$$

$$\frac{2 \times 10^{-25}}{2.75 \times 10^{-26}} - \phi = 6$$

$$\Rightarrow \phi = (7.27 - 6) \cong 1.2 \text{ eV}$$

17. एक स्क्रू-गेज का प्रयोग करते हुए किसी तार के अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल का मापन किया जाता है। मुख्य पैमाने का चुड़ी अंतराल  $0.5 \text{ mm}$  है। वृत्तीय पैमाने में  $100$  प्रभाग हैं तथा वृत्तीय पैमाने के एक पूर्ण घूर्णन के लिए, मुख्य पैमाना दो प्रभागों द्वारा विस्थापित होता है। मापे गये पाठ्यांक नीचे दिये गये हैं।

मापन स्थिति	मुख्य पैमाना पाठ्यांक	वृत्तीय पैमाना पाठ्यांक
गेज की दोनों भुजायें बिना तार के एक दूसरे से स्पर्श कर रही हैं	0 प्रभाग	4 प्रभाग
प्रयास-1: तार के साथ	4 प्रभाग	20 प्रभाग
प्रयास-2: तार के साथ	4 प्रभाग	16 प्रभाग

स्क्रू-गेज द्वारा तार के मापे गये व्यास तथा अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल क्या हैं?

- (A)  $2.22 \pm 0.02 \text{ mm}$ ,  $\pi (1.23 \pm 0.02) \text{ mm}^2$
- (B)  $2.22 \pm 0.01 \text{ mm}$ ,  $\pi (1.23 \pm 0.01) \text{ mm}^2$
- (C)  $2.14 \pm 0.02 \text{ mm}$ ,  $\pi (1.14 \pm 0.02) \text{ mm}^2$
- (D)  $2.14 \pm 0.01 \text{ mm}$ ,  $\pi (1.14 \pm 0.01) \text{ mm}^2$

उत्तर (C)

हल पाठ्यांक -1

$$\text{MSR} = 4 \times 0.5 = 2 \text{ mm}$$

$$\text{CSR} = \frac{20}{100} \text{ mm}$$

$$\text{शून्य त्रुटि} = \frac{4}{100} = 0.04 \text{ mm}$$

$$R_1 = \text{MSR} + \text{CSR} - (\text{शून्य त्रुटि})$$

$$= (2 + 0.20 - 0.04) \text{ mm}$$

$$= 2.16 \text{ mm}$$

पाठ्यांक -2

$$\text{MSR} = 2 \text{ mm}$$

$$\text{CSR} = 0.16 \text{ mm}$$

$$\text{शून्य त्रुटि} = 0.04 \text{ mm}$$

$$R_2 = (2 + 0.16 - 0.04) \text{ mm} = 2.12 \text{ mm}$$

$$\text{पाठ्यांक / औसत} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 2.14 \text{ mm} = R_m \text{ (माना)}$$

$$\text{औसत माध्य त्रुटि} = \frac{|R_m - R_1| + |R_m - R_2|}{2} = 0.02 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \text{व्यास} = (2.14 \pm 0.02) \text{ mm} = d \text{ (माना)}$$

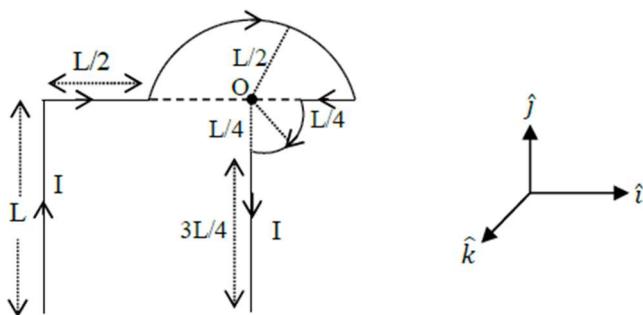
$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ क्षेत्र फल} = \frac{2\pi d}{4} (\Delta d)$$

$$\Rightarrow \Delta \text{ क्षेत्र फल} \approx \pi(0.02)$$

$$\Rightarrow \text{क्षेत्र फल} = \frac{\pi d^2}{4} \pm \Delta \text{ क्षेत्र फल} = \pi(1.14 \pm 0.02) \text{ mm}$$

18. निम्नलिखित में से कौनसा विकल्प  $xy$  तल पर स्थित दिये गये तार खण्ड में प्रवाहित धारा के कारण  $O$  पर चुंबकीय क्षेत्र  $\vec{B}$  को प्रदर्शित करता है?



$$(A) \vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{L} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right) \hat{k}$$

$$(B) \vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{L} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \right) \hat{k}$$

$$(C) \vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{L} \left( 1 + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right) \hat{k}$$

$$(D) \vec{B} = \frac{-\mu_0 I}{L} \left( 1 + \frac{1}{4\pi} \right) \hat{k}$$

उत्तर (C)

हल  $B_{\text{नेट}} = B_{\text{अर्धवृत्त}} + B_{\text{एक चौथाई}} + B_{\text{सरल रेखा}}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\left(\frac{L}{2}\right)} + \frac{\mu_0 I}{8 \times \left(\frac{L}{4}\right)} + \frac{\mu_0 I}{4\pi \times L} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) (-\hat{k})$$

$$= \left( \frac{\mu_0 I}{2L} + \frac{\mu_0 I}{2L} + \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}\pi L} \right) (-\hat{k})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{L} \left( 1 + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \right) (-\hat{k})$$

## PART-II : CHEMISTRY

### खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में आठ (08) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, दोनों सम्मिलित की परास में एकल अंकीय पूर्णांक है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल चूमेरिक कीपैड के प्रयोग से उत्तर दर्ज करने के लिए चिन्हित स्थान पर दर्ज कीजिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही पूर्णांक ही दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि प्रश्न अनुत्तरित है;

ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में

1. एक विलयन में  $\text{H}_2\text{SO}_4$  और  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  की सांद्रता क्रमशः 1 M तथा  $1.8 \times 10^{-2}$  M है। इसी विलयन में  $\text{PbSO}_4$  की मोलर विलेयता  $X \times 10^{-Y}$  M (वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त) है। Y का मान \_\_\_\_\_ है।

[दिया गया है:  $\text{PbSO}_4$  का विलेयता गुणनफल ( $K_{sp}$ ) =  $1.6 \times 10^{-8}$ .  $\text{H}_2\text{SO}_4$  के लिए,  $K_{a_1}$  बहुत अधिक है तथा  $K_{a_2} = 1.2 \times 10^{-2}$  है]

उत्तर (6)



$$\text{Na}_2\text{SO}_4 \text{ से प्राप्त } [\text{SO}_4^{2-}] = 1.8 \times 10^{-2}$$

$$\frac{[\text{SO}_4^{2-}][\text{H}^+]}{[\text{HSO}_4^-]} = \frac{1.8 \times 10^{-2} \times 1}{1} > K_{a_2}$$

$\therefore \text{HSO}_4^-$  के  $\text{H}^+$  तथा  $\text{SO}_4^{2-}$  आयनों में वियोजन के बजाय, पहले से उपस्थित  $\text{H}^+$  तथा  $\text{SO}_4^{2-}$  के मध्य संगुणन होगा।

माना 'x' mol/L  $\text{SO}_4^{2-}$  व  $\text{H}^+$  संयोग करके  $\text{HSO}_4^-$  बनाते हैं

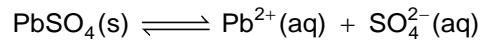
$$\therefore [\text{SO}_4^{2-}] = 1.8 \times 10^{-2} - x$$

$$\left. \begin{array}{l} [\text{H}^+] = 1 - x \approx 1 \\ [\text{HSO}_4^-] = 1 + x \approx 1 \end{array} \right\} \text{ (माना } x \ll 1 \text{ है)}$$

$$\frac{(1.8 \times 10^{-2} - x)1}{1} = 1.2 \times 10^{-2}$$

$$\Rightarrow x = 0.6 \times 10^{-2}$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = 1.2 \times 10^{-2} \text{ M}$$



यदि  $\text{PbSO}_4$  की विलेयता = s M

$$\therefore [\text{Pb}^{2+}] = s$$

$$[\text{SO}_4^{2-}] = s + 1.2 \times 10^{-2} \approx 1.2 \times 10^{-2} \quad (\text{माना } << 1.2 \times 10^{-2})$$

$$\therefore s \times 1.2 \times 10^{-2} = 1.6 \times 10^{-8}$$

$$s = \frac{1.6}{1.2} \times 10^{-6} = 1.33 \times 10^{-6}$$

$X \times 10^{-Y}$  के साथ तुलना करने पर

$$Y = 6$$

2. 35°C पर 1.8 kg जल में 0.1 मोल आयनिक लवण को घोलकर एक जलीय विलयन बनाया जाता है। विलयन में लवण 90% वियोजित रहता है। विलयन का वाष्प दाब 59.724 mm Hg है। 35°C पर जल का वाष्प दाब 60.000 mm Hg है। आयनिक लवण के प्रति सूत्र इकाई में उपस्थित आयनों की संख्या \_\_\_\_\_ है।

उत्तर (5)

हल: आयनिक लवण के प्रति सूत्र इकाई में उपस्थित आयनों की संख्या = x

$$\text{वॉट हॉफ गुणांक } (i) = 0.9 \times x + 0.1 \times 1$$

(90% वियोजन मानते हुए)

$\therefore$  वाष्प दाब में आपेक्षिक अवनमन = विलय का मोल प्रभाज

$$\Rightarrow \frac{60 - 59.724}{60} = \frac{i \times 0.1}{\frac{1800}{18} + 0.1}$$

$$\Rightarrow 0.0046 = \frac{i \times 0.1}{100 + 0.1}$$

$$0.0046 \approx \frac{(0.9x + 0.1) \times 0.1}{100}$$

$$\Rightarrow 0.9x + 0.1 = 4.6$$

$$\Rightarrow x = \frac{4.5}{0.9} = 5$$

$$x = 5$$

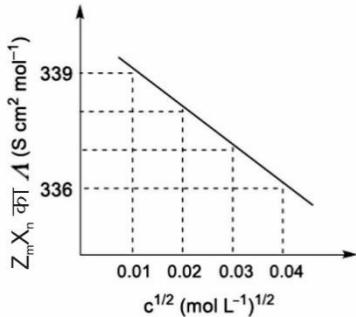
3. प्रबल विद्युतअपघट्य  $Z_m X_n, U_m Y_p$  तथा  $V_m X_n$  पर विचार कीजिए। ( $\Lambda^0$ )  $U_m Y_p$  तथा  $V_m X_n$  की सीमांत मोलर चालकता 250 तथा 440  $\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1}$  है। ( $m + n + p$ ) का मान \_\_\_\_\_ है।

दिया है:

आयन	$Z^{n+}$	$U^{p+}$	$V^{n+}$	$X^{m-}$	$Y^{m-}$
$\lambda^0 (\text{S cm}^2 \text{ mol}^{-1})$	50.0	25.0	100.0	80.0	100.0

$\lambda^0$  आयनों की सीमांत मोलर चालकता है

$Z_m X_n$  की मोलर चालकता ( $\Lambda$ ) व  $c^{1/2}$  के मध्य आरेख नीचे दिया गया है



उत्तर (7)

हल:  $\lambda_m = \lambda_m^o - A\sqrt{C}$

विद्युतअपघट्य  $Z_m X_n$  व दिए गए वक्र के लिए

$$\lambda_m(Z_m X_n) = \lambda_m^o(Z_m X_n) - A\sqrt{C}$$

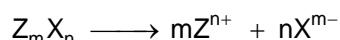
$$-A = \frac{336 - 339}{0.04 - 0.01} = -\frac{3}{0.03}$$

$$\Rightarrow A = 100$$

$$\therefore \lambda_m^o \text{ के लिए} = 336 \text{ } S \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1}$$

$$\Rightarrow 336 = \lambda_m^o(Z_m X_n) - 100 \times 0.04$$

$$\lambda_m^o = 336 + 4 = 340 \text{ } S \text{ cm}^2 \text{ mol}^{-1}$$



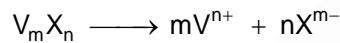
$$\therefore 50m + 80n = 340$$

$$\Rightarrow 5m + 8n = 34 \quad \dots(i)$$



$$\therefore 25m + 100p = \lambda_m^o(U_m Y_p) = 250$$

$$\Rightarrow m + 4p = 10 \quad \dots(ii)$$



$$\therefore 100m + 80n = 440$$

$$\Rightarrow 5m + 4n = 22 \quad \dots(iii)$$

समीकरण (i) व (iii) से

$$n = 3$$

$$m = 2$$

समीकरण (ii) से

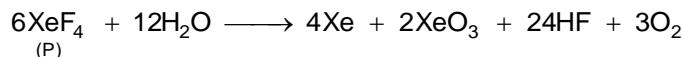
$$p = 2$$

$$\therefore m + n + p = 2 + 3 + 2 = 7$$

4.  $Xe$  तथा  $O_2F_2$  की अभिक्रिया पर  $Xe$  का यौगिक  $P$  बनता है। 1 मोल  $P$  के पूर्ण जलअपघटन द्वारा प्राप्त  $HF$  के मोलों की संख्या \_\_\_\_\_ है।

उत्तर (4)

हल:  $Xe + 2O_2F_2 \rightarrow XeF_4 + 2O_2$



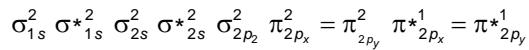
1 मोल ( $P$ ) के पूर्ण जलअपघटन पर प्राप्त  $HF$  के मोलों की संख्या = 4

5.  $AgNO_3$  के ऊष्मीय अपघटन पर दो अनुच्चम्बकीय गैसें प्राप्त होती हैं। अयुग्मित इलेक्ट्रॉनों की अधिकतम संख्या वाली गैस के प्रतिआंधी आणविक कक्षकों में उपस्थित कुल इलेक्ट्रॉनों की संख्या \_\_\_\_\_ है।

उत्तर (6)

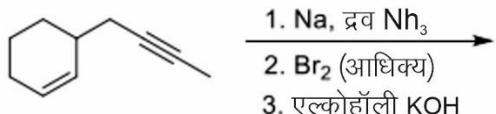


$\text{NO}_2$  तथा  $\text{O}_2$  दोनों अनुचूम्बकीय गैसें हैं।  $\text{NO}_2(\text{g})$  में एक अयुग्मित इलेक्ट्रॉन तथा  $\text{O}_2(\text{g})$  में 2 अयुग्मित इलेक्ट्रॉन होते हैं। MOT के अनुसार  $\text{O}_2$  का इलेक्ट्रॉनिक विन्यास निम्न है:

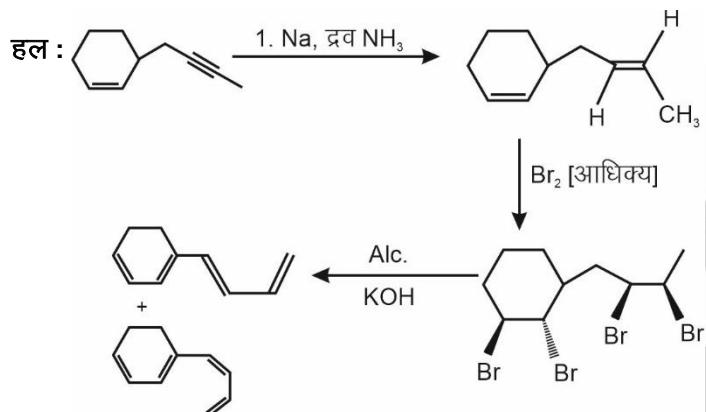


प्रतिआबंधित अणु कक्षकों में उपस्थित इलेक्ट्रॉनों की कुल संख्या = 6

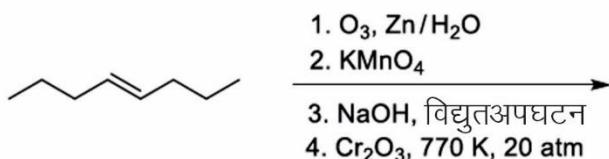
6. निम्नलिखित अभिक्रिया अनुक्रम में बनने वाली समावयवीय टेट्राइन (जिसमें कार्बन परमाणु  $sp$  संकरित न हो) की संख्या \_\_\_\_\_ है।



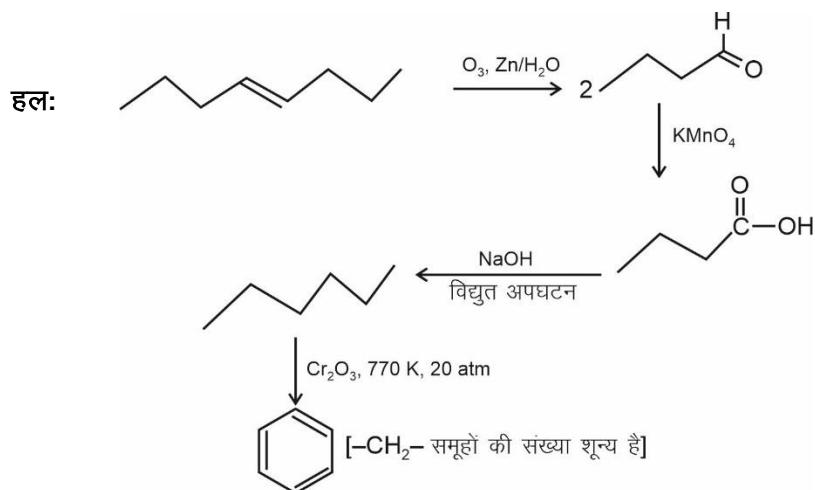
उत्तर (2)



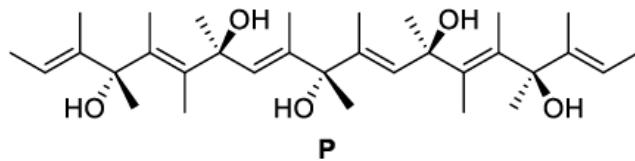
7. निम्नलिखित अभिक्रिया अनुक्रम में प्राप्त उत्पाद में  $-\text{CH}_2-$  (मेथिलीन) समूहों की संख्या \_\_\_\_\_ है।



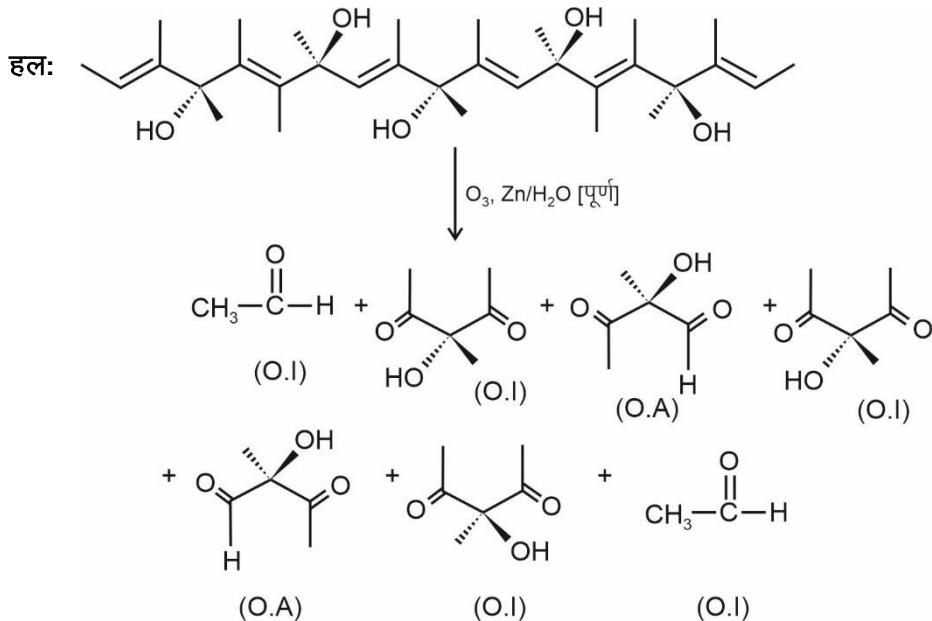
उत्तर (0)



8. P के एक अणु के पूर्ण ओजोनीअपघटन ( $O_3$ ,  $Zn/H_2O$ ) से प्राप्त किरैल अणुओं की कुल संख्या \_\_\_\_\_ है।



उत्तर (2)



∴ दो किरैल अणु प्राप्त होते हैं।

#### खण्ड - 2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में छ: (06) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, (सभी) सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है / हैं;

आंशिक अंक : +3 यदि सभी चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;

आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है, दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;

आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;

शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);

ऋण अंक : -2 अन्य सभी परिस्थितियों में।

9. गुणित अनुपात के नियम के जांच के लिए शुद्ध द्विअंगी यौगिकों ( $P_m Q_n$ ) की एक श्रेणी का विश्लेषण किया गया तथा उनके संघटन नीचे सारणीबद्ध हैं। सही विकल्प हैं/हैं

यौगिक	P का भार %	Q का भार %
1	50	50
2	44.4	55.6
3	40	60

- (A) यदि यौगिक 3 का मूलानुपाती सूत्र  $P_3 Q_4$  है, तो यौगिक 2 का मूलानुपाती सूत्र  $P_3 Q_5$  है।  
 (B) यदि यौगिक 3 का मूलानुपाती सूत्र  $P_3 Q_2$  है और तत्व P का परमाणु भार 20 है, तो Q का परमाणु भार 45 है।  
 (C) यदि यौगिक 2 का मूलानुपाती सूत्र  $PQ$  है, तो यौगिक 1 का मूलानुपाती सूत्र  $P_5 Q_4$  है।  
 (D) यदि P और Q के परमाणु भार क्रमशः 70 और 35 हैं, तो यौगिक 1 का मूलानुपाती सूत्र  $P_2 Q$  है।

उत्तर (B, C)

हल: (A) यदि 3 का मूलानुपाती सूत्र  $P_3 Q_4$  है, तो अनुसूत्र  $(P_3 Q_4)_n$  है

$$\Rightarrow \frac{3M_P}{3M_P + 4M_Q} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

$$15M_P = 6M_P + 8M_Q$$

$$9M_P = 8M_Q$$

$$\therefore P_3 Q_5 \text{ के लिए, \% } P = \left( \frac{3M_P}{3M_P + 5M_Q} \right) \times 100 = \frac{8M_Q}{23M_Q} \times 100 \approx 34.78\%$$

- (B) यदि यौगिक 3 का मूलानुपाती सूत्र  $P_3 Q_2$  है, हमें ज्ञात है

$$\frac{3M_P}{3M_P + 2M_Q} = \frac{2}{5}$$

$$15M_P = 6M_P + 4M_Q$$

$$9M_P = 4M_Q$$

$$\text{यदि } M_P = 20$$

$$M_Q = \frac{180}{4} = 45$$

- (C) यदि 2 का मूलानुपाती सूत्र  $PQ$  हो, तो

$$\therefore \frac{M_P}{M_P + M_Q} = \frac{4}{9} \approx \frac{44.44}{100}$$

$$9M_P = 5M_P + 4M_Q$$

$$5M_P = 4M_Q$$

यदि मूलानुपाती सूत्र को  $P_5 Q_4$  माने तो

$$\% P = \left( \frac{5M_P}{5M_P + 4M_Q} \right) \times 100 = 50$$

अतः यौगिक का मूलानुपाती सूत्र  $P_5 Q_4$  है

(D) यदि I का मूलानुपाती सूत्र  $P_2Q$  है, हमें ज्ञात है

$$\% P = \left( \frac{2M_P}{2M_P + M_Q} \right) \times 100 = 50$$

$$4M_P = 2M_P + M_Q$$

$$2M_P = M_Q$$

अतः P तथा Q के परमाणु भार क्रमशः 70 तथा 35 नहीं हो सकते हैं।

अतः (B, C) सही हैं।

10. एन्ट्रॉपी (S) के बारे में सही विकल्प हैं/हैं

[R = गैस स्थिरांक, F = फैराडे स्थिरांक, T = तापमान]

(A) अभिक्रिया  $M(s) + 2H^+(aq) \rightarrow H_2(g) + M^{2+}(aq)$  के लिए, यदि  $\frac{dE_{\text{सेल}}}{dT} = \frac{R}{F}$ , अभिक्रिया का एन्ट्रॉपी परिवर्तन R है

(माना कि एन्ट्रॉपी और आंतरिक ऊर्जा परिवर्तन ताप पर निर्भर नहीं करते हैं)

(B) सेल अभिक्रिया  $Pt(s) | H_2(g, 1\text{bar}) | H^+(aq, 0.01\text{M}) || H^+(aq, 0.1\text{M}) | H_2(g, 1\text{bar}) | Pt(s)$ , एक एन्ट्रॉपी संचालित प्रक्रम है

(C) एक ध्रुवण घूर्णक यौगिक के रेसिमीकरण के लिए,  $\Delta S > 0$  होता है

(D)  $[Ni(H_2O)_6]^{2+} + 3 en \rightarrow [Ni(en)_3]^{2+} + 6H_2O$  के लिए  $\Delta S > 0$ , (जहाँ en = ऐथिलीनडाइऐमीन)

उत्तर (B, C, D)

हल: (A)  $M(s) + 2H^+(aq) \rightarrow H_2(g) + M^{2+}(aq)$

$$\text{यदि } \frac{dE_{\text{cell}}}{dT} = \frac{R}{F}$$

$$\Delta S = nF \frac{dE}{dT} = 2F \left( \frac{R}{F} \right) = 2R$$

$$(B) E_{\text{cell}} = \frac{-2.303RT}{F} \log \frac{0.01}{0.1} = \frac{2.303RT}{F}$$

$$\frac{dE_{\text{cell}}}{dT} = \frac{2.303R}{F}$$

$$\therefore \Delta S = nF \frac{dE}{dT} > 0$$

यह एक एन्ट्रॉपी प्रेरित प्रक्रम है।

(C) यह सही है

ध्रुवण घूर्णक यौगिक के रेसिमीकरण के दौरान अव्यवस्था बढ़ती है तथा इस कारण एन्ट्रॉपी बढ़ती है।

(D)  $[Ni(H_2O)_6]^{2+} + 3en \rightarrow [Ni(en)_3]^{2+} + 6H_2O$  के लिए,

जब द्विदंतुर लीगेण्ड, एकदन्तुर लीगेण्ड को प्रतिस्थापित करता है, तो उत्पाद की ओर अणुओं की संख्या बढ़ने के कारण एन्ट्रॉपी बढ़ती है।

अतः, (B, C, D) सही हैं।

11. कौनसा / कौनसे यौगिक  $\text{NH}_3$  के साथ अभिक्रिया करके बोरॉन नाइट्राइड (BN) देता है / देते हैं?

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| (A) B                      | (B) $\text{B}_2\text{H}_6$ |
| (C) $\text{B}_2\text{O}_3$ | (D) $\text{HBF}_4$         |

उत्तर (A, B, C)

हल:  $\text{NH}_3$  के साथ अभिक्रिया करके बोरॉन नाइट्राइड (BN) बनाने वाले यौगिक निम्न हैं/हैं:

- (A) अक्रिष्टलीय  $\text{B} + \text{NH}_3 \xrightarrow[\text{ताप}]{\text{अति उच्च}} \text{BN} + \text{H}_2$
- (B)  $\text{B}_2\text{H}_6 + \text{NH}_3 \xrightarrow[\text{(आधिक्य)}]{\text{उच्च ताप}} (\text{BN})_x$
- (C)  $\text{B}_2\text{O}_3 + 2\text{NH}_3 \xrightarrow{900^\circ\text{C}} 2\text{BN} + 3\text{H}_2\text{O}$
- (D)  $\text{HBF}_4 + \text{NH}_3 \longrightarrow [\text{NH}_4^+] [\text{BF}_4^-]$

अतः (A, B, C) सही हैं।

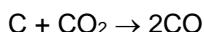
12. 900 – 1500 K के ताप परास पर वात्या भट्टी में आयरन अयस्क से आयरन के निष्कर्षण से संबंधित सही विकल्प है/हैं

- (A) सिलिकेट अशुद्धि को दूर करने के लिए चूना पत्थर का उपयोग किया जाता है।
- (B) वात्या भट्टी से प्राप्त कच्चे लोहे में लगभग 4% कार्बन होता है।
- (C) कोक (C),  $\text{CO}_2$  को CO में परिवर्तित करता है।
- (D) निष्कासित गैसों में  $\text{NO}_2$  और CO होती हैं।

उत्तर (A, B, C)

हल: (A) अशुद्धि के रूप में स्थित सिलिका को निष्कासित करने के लिए चूना पत्थर मिलाया जाता है।

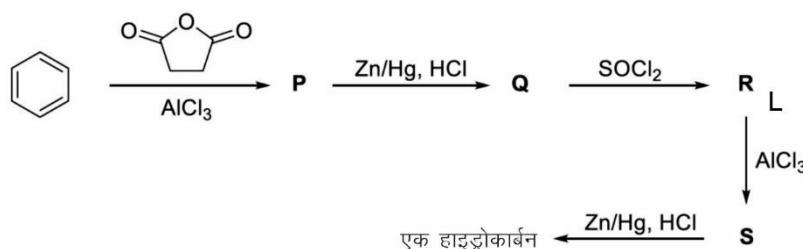
- (B) वात्या भट्टी से प्राप्त कच्चे लोहे में 4% कार्बन तथा अल्प मात्रा में कई अन्य अशुद्धियाँ (जैसे S, P, Si, Mn) होती हैं।
- (C) कोक (C),  $\text{CO}_2$  को CO में परिवर्तित कर देता है।



- (D) निष्कासित गैसों में CO तथा  $\text{CO}_2$  गैसें होती हैं।

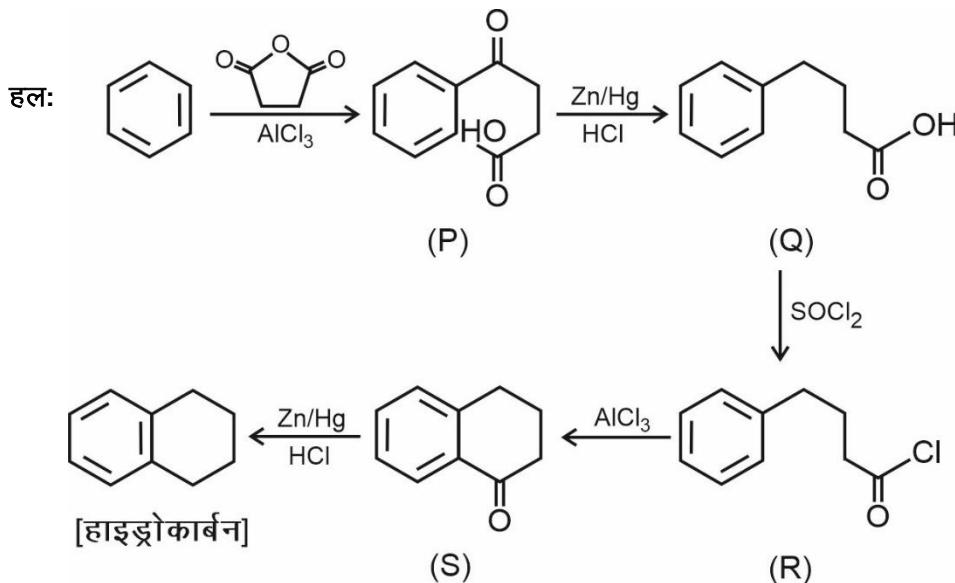
अतः, (A, B, C) सही हैं।

13. निम्नलिखित अभिक्रिया अनुक्रम को ध्यान में रखते हुए, सही कथन है/हैं

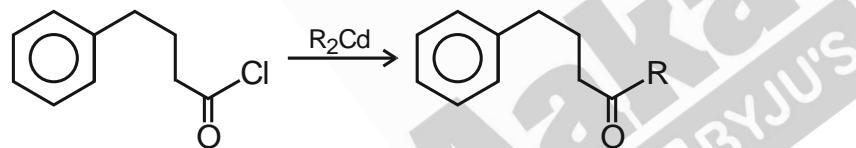


- (A) यौगिक P और Q कार्बोक्सिलिक अम्ल हैं।
  - (B) यौगिक S ब्रोमीन जल को रंगहीन कर देता है।
  - (C) यौगिक P और S हाइड्रोक्सिलएमीन के साथ अभिक्रिया करके संगत ऑक्सिम देते हैं।
  - (D) यौगिक R, डाइएल्किलकैडमियम से अभिक्रिया करके संगत तृतीयक ऐल्कोहॉल देता है।

**उत्तर (A, C)**



यौगिक (S) ब्रोमीन जल को विरंजित नहीं कर सकता।



**R<sub>2</sub>Cd** एक कम क्रियाशील नाभिकस्नेही है अतः यह अभिक्रिया कार्बोनिल समूह पर समाप्त (रुक) जाती है।

**14.** निम्नलिखित में से, बहुलकों के बारे में सही कथन है / हैं

- (A) क्लोरोप्रीन के बहुलकीकरण पर प्राकृतिक रबर प्राप्त होती है।
  - (B) टेफ्लॉन को उच्च दाब पर परसल्फेट उत्प्रेरक के साथ गर्म करके टेट्रापलुओरोएथीन से प्राप्त किया जाता है।
  - (C) PVC तापसुघट्य बहुलक हैं।
  - (D) एथीन से 350-570 K ताप तथा 1000-2000 atm दाब पर पर्यांकसाइड प्रारम्भक की उपस्थिति में उच्च घनत्व वाली पॉलिथीन प्राप्त होती है।

### **उत्तर (B, C)**

हल: (A) व्लोरोप्रीन के बहलकीकरण पर संश्लेषित रबर प्राप्त होता है।

- (B) टेट्राप्लुओरोएथीन को उच्च दाब पर मुक्त मूलक या परसल्फेट उत्प्रेरक के साथ गर्म करने पर टेपलॉन बनता है।

(C) पॉलिवाइनिल क्लोरोइड (PVC) एक ताप सुधृत्य बहुलक है तथा इसका उपयोग हैण्ड बैग, वाइनिल फ्लोरिंग तथा वाटर (जल के) पाइप बनाने में किया जाता है।

(D) परॉक्साइड प्रारम्भक की उपस्थिति में 350 – 570 K atm ताप व 1000-2000 atm दाब पर एथीन से कम घनत्व वाली पॉलिथीन प्राप्त होती है।

## खण्ड - 3 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में चार (**04**) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक	:	+3	यदि केवल सही विकल्प को चुना गया है;
शून्य अंक	:	0	यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);
ऋण अंक	:	-1	अन्य सभी परिस्थितियों में।

**15.** परमाणु X, fcc जालक स्थलों तथा इसी जालक की एकान्तर चतुष्फलकीय रिक्तियों को ग्रहण करते हैं। परिणामी ठोस की संकुलन क्षमता (%) में लगभग है

- (A) 25  
 (B) 35  
 (C) 55  
 (D) 75

**उत्तर (B)**

**हल:** परमाणु X, FCC जालक स्थल तथा FCC की एकान्तर चतुष्फलकीय रिक्तियाँ ग्रहण करते हैं।

FCC, में चतुष्फलकीय रिक्तियाँ 8 (एक एकक कोष्ठिका में)

अतः

$$\text{एक एकक कोष्ठिका में परमाणु X (FCC जालक स्थल)} = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\text{एक एकक कोष्ठिका में परमाणु X (T.V. में)} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\text{एक एकक कोष्ठिका में कुल X परमाणु} = 8$$

a तथा r के मध्य सम्बन्ध के लिए, चूंकि निर्मित T.V. (चतुष्फलकीय रिक्ति) काय विकर्ण के  $\frac{1}{4}$  th भाग पर होती है,

$$\frac{a\sqrt{3}}{4} = 2r$$

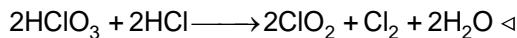
$$a = \frac{8r}{\sqrt{3}}$$

$$\text{संकुलन क्षमता} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} \times 100 = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\left(\frac{8r}{\sqrt{3}}\right)^3} \times 100 \approx 35\%$$

16.  $\text{HClO}_3$  की HCl के साथ अभिक्रिया पर एक अनुचुंबकीय गैस प्राप्त होती है, जो  $\text{O}_3$  के साथ अभिक्रिया पर देती है
- $\text{Cl}_2\text{O}$
  - $\text{ClO}_2$
  - $\text{Cl}_2\text{O}_6$
  - $\text{Cl}_2\text{O}_7$

उत्तर (C)

हल:  $\text{HClO}_3$  निम्न समीकरण के अनुसार HCl के साथ अभिक्रिया करता है।



$\text{ClO}_2$  अणु अनुचुम्बकीय होता है क्योंकि इसमें विषम संख्या में अयुग्मित इलेक्ट्रॉन होते हैं।

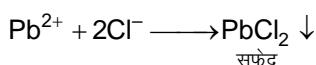


17. जल में  $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$  और  $\text{NaCl}$  की अभिक्रिया से एक अवक्षेप प्राप्त है जो उपयुक्त सान्द्रता का HCl मिलाने पर धुल जाता है। किसके बनने के कारण अवक्षेप धुल जाता है?

- $\text{PbCl}_2$
- $\text{PbCl}_4$
- $[\text{PbCl}_4]^{2-}$
- $[\text{PbCl}_6]^{2-}$

उत्तर (C)

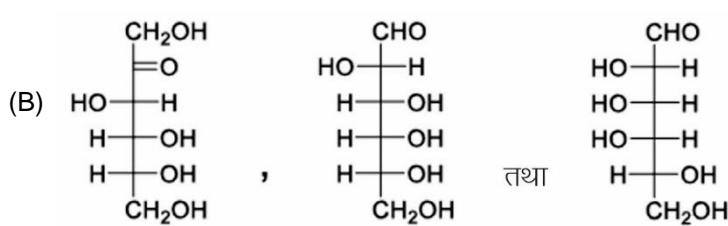
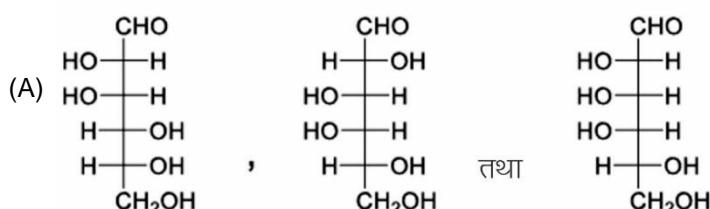
हल:  $\text{Pb}^{2+}$  की  $\text{Cl}^-$ , के साथ अभिक्रिया पर  $\text{PbCl}_2$  का सफेद अवक्षेप प्राप्त होता है।

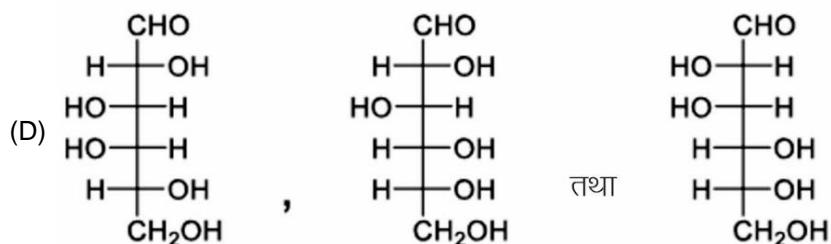
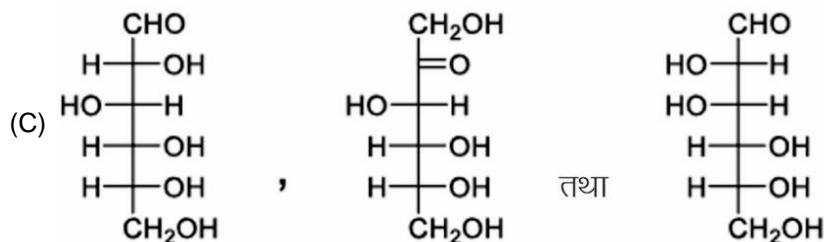


यह अवक्षेप टेट्राक्लोरोप्लम्बेट (II) आयन बनने के कारण सान्द्र हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में विलेयशील होता है।

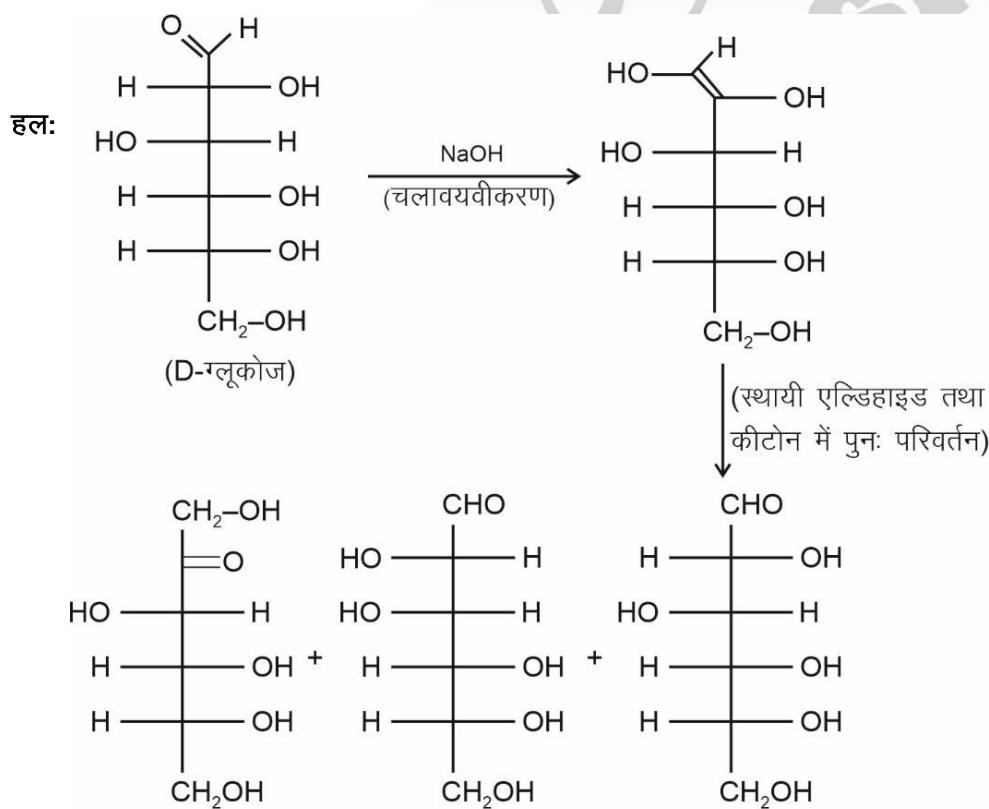


18. जलीय  $\text{NaOH}$  के साथ D-ग्लूकोज के उपचार के परिणामस्वरूप मोनोसैक्रोइडों का एक मिश्रण प्राप्त है, जिसमें मोनोसैक्रोइड हैं





उत्तर (C)



[3 यौगिकों का मिश्रण प्राप्त होगा]

## PART-III : MATHEMATICS

### खण्ड - 1 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में आठ (08) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक, दोनों सम्मिलित की परास में एकल अंकीय पूर्णांक है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, उत्तर से संबंधित सही पूर्णांक को माउस और ऑन-स्क्रीन वर्चुअल न्यूमेरिक कीपैड के प्रयोग से उत्तर दर्ज करने के लिए चिह्नित स्थान पर दर्ज कीजिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही पूर्णांक ही दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि प्रश्न अनुत्तरित है;

ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में

1. माना  $\alpha$  और  $\beta$  वास्तविक संख्याएँ हैं जबकि  $-\frac{\pi}{4} < \beta < 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ , यदि  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$  तथा  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2}{3}$ , तब

$$\left( \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right)^2 \text{ से कम या इसके बराबर महत्तम पूर्णांक ज्ञात कीजिए।}$$

उत्तर (1)

$$\text{हल } \left( \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right)^2$$

$$= \left( \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta \cos \beta} + \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

$$= \left( \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{\sin 2\beta} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \right\} \right)^2$$

$$= \frac{16}{9} \left( \frac{2\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta} \right)^2$$

$$= \frac{16}{9} \left( \frac{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)} \right)^2$$

$$= \frac{16}{9} \left( \frac{\frac{8}{9}}{2\cos^2(\alpha - \beta) - 1 - 1 + 2\sin^2(\alpha + \beta)} \right)^2$$

$$= \frac{16}{9} \left( \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{9} - 2 + \frac{2}{9}} \right)^2$$

$$= \frac{16}{9}$$

$$= 1$$

2. यदि  $x > 0, y(1) = 2$  के लिए अवकल समीकरण  $xdy - (y^2 - 4y)dx = 0$  का हल  $y(x)$  है तथा वक्र  $y = y(x)$  की प्रवणता कभी शून्य नहीं होती है, तब  $10y(\sqrt{2})$  का मान ज्ञात कीजिए।

**उत्तर (8)**

$$\text{हल } \frac{dy}{y^2 - 4y} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \left( \frac{1}{y-4} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{dx}{x}$$

दोनों ओर समाकलन करने पर

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y-4}{y} \right| = \ln|x| + c$$

चूंकि,  $y(1) = 2, c = 0$

$$\text{इसलिए, } \frac{y-4}{y} = \pm x^4$$

$$\text{या, } y = \frac{4}{1 \pm x^4}$$

$$y = \frac{4}{1+x^4} \text{ पर विचार करने पर}$$

$$y(\sqrt{2}) = \frac{4}{5}$$

$$\text{इसलिए, } 10y(\sqrt{2}) = 8$$

3.  $\int_1^2 \log_2(x^3 + 1)dx + \int_1^{\log_2 9} (2^x - 1)^{\frac{1}{3}} dx$  से कम या इसके बराबर महत्म पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

**उत्तर (5)**

$$\text{हल } I = \int_1^2 \log_2(x^3 + 1)dx + \int_1^{\log_2 9} (2^x - 1)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$\text{माना } \int_1^{\log_2 9} (2^x - 1)^{\frac{1}{3}} dx = I_2$$

$$\text{माना } 2^x - 1 = t^3$$

$$\Rightarrow 2^x \ln 2 dx = 3t^2 dt$$

$$\text{या } dx = \frac{3t^2}{\ln 2(t^3 + 1)} dt$$

इसलिए,  $I = \int_1^2 \log_2(x^3 + 1)dx + \int_1^2 \frac{3t^3}{\ln 2(t^3 + 1)} dt$

या  $I = \int_1^2 \left( \log_2(t^3 + 1) + t \cdot \frac{3t^2}{(t^3 + 1)\ln 2} \right) dt$

$$= t \cdot \log_2(t^3 + 1) \Big|_1^2$$

$$= 2\log_2 9 - 1\log_2 2$$

$$= 2\log_2 9 - 1$$

इसलिए,  $[I] = 5$

4. समीकरण  $x^{(16(\log_5 x)^3 - 68\log_5 x)} = 5^{-16}$  को संतुष्ट करने वाले  $x$  के सभी धनात्मक वास्तविक मानों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

**उत्तर (01)**

हल आधार 5 के साथ दोनों ओर log लगाने पर

$$(16(\log_5 x)^3 - 68(\log_5 x))(\log_5 x) = -16$$

$$\text{माना } (\log_5 x) = t$$

$$16t^4 - 68t^2 + 16 = 0$$

$$\text{या } 4t^4 - 16t^2 - t^2 + 4 = 0$$

$$\text{या } (4t^2 - 1)(t^2 - 4) = 0$$

$$\text{या } t = \pm \frac{1}{2}, \pm 2$$

$$\text{इसलिए } \log_5 x = \pm \frac{1}{2} \text{ या } \pm 2$$

$$\Rightarrow x = 5^{\frac{1}{2}}, 5^{\frac{-1}{2}}, 5^2, 5^{-2}$$

5. यदि  $\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - (1-x^3)^{\frac{1}{3}} + ((1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1)\sin x}{x \sin^2 x}$ , तब  $6\beta$  का मान ज्ञात कीजिए।

**उत्तर (5)**

हल  $\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - (1-x^3)^{\frac{1}{3}} + ((1-x^2)^{\frac{1}{2}} - 1)\sin x}{x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x^2}$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left( 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \dots \right) - \left( 1 - \frac{1}{3}x^3 + \left( -\frac{1}{9} \right)x^6 + \dots \right) + \left( -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \dots \right) \left( x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)}{x^3} \right\}$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)}{x^3} \quad (x \text{ के उच्च घात को नगण्य मानने पर)}$$

$$\text{इसलिए, } \beta = \frac{5}{6}$$

$$\text{या } 6\beta = 5$$

6. माना  $\beta$  एक वास्तविक संख्या है। आव्यूह  $A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  पर विचार कीजिए। यदि  $A^7 - (\beta - 1)A^6 - \beta A^5$  एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है, तब  $9\beta$  का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर (3)

$$\text{हल } A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -1 \quad \dots(1)$$

$A^7 - (\beta - 1)A^6 - \beta A^5$  के अव्युत्क्रमणीय होने के लिए

$$|A^5| |A^2 - (\beta - 1)A - \beta| = 0$$

$$\Rightarrow |A^5| |(A + I)(A - \beta I)| = 0 \quad \dots(2)$$

$$\therefore |A^5| |A + I| |A - \beta I| = 0$$

चूंकि  $|A| \neq 0$

$$|A + I| \text{ या } |A - \beta I| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta + 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \{|A + I| \neq 0\}$$

दिया है,  $-1 = 0$  (अस्वीकृत)

$$\therefore |A - \beta I| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1-\beta & -2 \\ 3 & 1 & -2-\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 3(1 - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 3 + 3\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

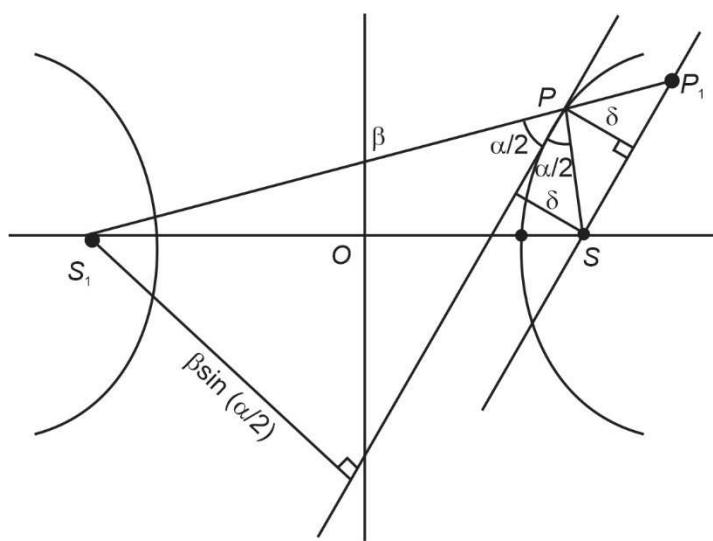
$$\therefore 9\beta = 3$$

7. अतिपरवलय  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$  पर विचार कीजिए जिसकी नाभि  $S$  व  $S_1$  पर है, जहाँ  $S$  धनात्मक  $x$ -अक्ष पर स्थित है। माना  $P$ ,

प्रथम चतुर्थांश में अतिपरवलय पर एक बिन्दु है। माना  $\angle SPS_1 = \alpha$ , जहाँ  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  है। सरल रेखा, बिन्दु  $S$  से गुजरती है तथा इसकी प्रवणता, अतिपरवलय के बिन्दु  $P$  पर स्पर्श रेखा की प्रवणता के समान है, जो सरल रेखा  $S_1P$  को  $P_1$  पर प्रतिच्छेद करती है। माना  $\delta$ , एक सरल रेखा  $SP_1$  से  $P$  की दूरी है, तथा  $\beta = S_1P$ , तब  $\frac{\beta\delta}{9}\sin\frac{\alpha}{2}$  से कम या इसके बराबर महत्तम पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर (7)

हल



दो नाभियों से किन्हीं स्पर्श रेखा की दूरियों का गुणनफल =  $b^2$

$$\delta \times \beta \sin \frac{\alpha}{2} = b^2$$

$$\text{इसलिए, } \frac{\beta\delta\sin\frac{\alpha}{2}}{9} = \frac{b^2}{9} = \frac{64}{9}$$

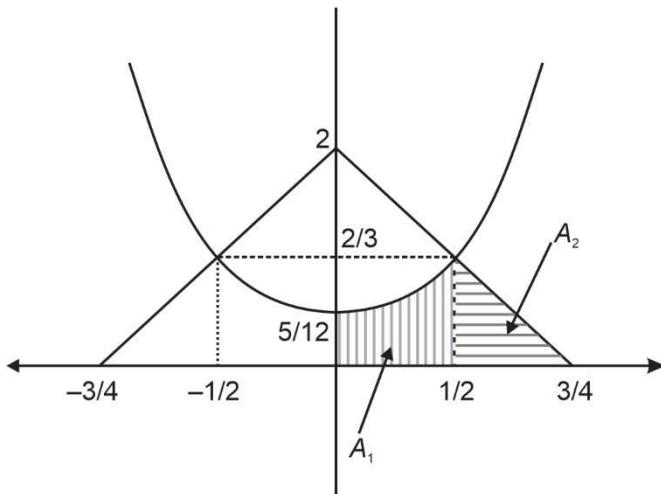
$\frac{\beta\delta\sin\frac{\alpha}{2}}{9}$  से कम या इसके बराबर महत्तम पूर्णांक 7 है।

8.  $f(x) = x^2 + \frac{5}{12}$  तथा  $g(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{4|x|}{3}\right), & |x| \leq \frac{3}{4}, \\ 0, & |x| > \frac{3}{4}. \end{cases}$  द्वारा परिभाषित फलन  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  पर विचार कीजिए। यदि क्षेत्र

$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq \frac{3}{4}, 0 \leq y \leq \min\{f(x), g(x)\}\}$  का क्षेत्रफल  $\alpha$  है, तब  $9\alpha$  का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर (6)

हल चित्र इस प्रकार आरेखित किया जा सकता है,



$$\text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = 2 \cdot (A_1 + A_2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \left( \int_0^{1/2} \left( x^2 + \frac{5}{12} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \right) \times 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \left( \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{5x}{12} \right]_0^{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \right) \times 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) \times 2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 9\alpha = 6$$

#### खण्ड – 2 (अधिकतम अंक : 24)

- इस खंड में छः (06) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से एक या एक से अधिक विकल्प सही उत्तर है(हैं)।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, (सभी) सही उत्तर (उत्तरों) से संबंधित विकल्प (विकल्पों) को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि केवल (सभी) सही विकल्प (विकल्पों) को चुना गया है / हैं;

आंशिक अंक : +3 यदि सभी चारों विकल्प सही हैं परंतु केवल तीन विकल्पों को चुना गया है;

आंशिक अंक : +2 यदि तीन या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल दो विकल्पों को चुना गया है, दोनों चुने हुए विकल्प सही विकल्प हैं;

आंशिक अंक : +1 यदि दो या अधिक विकल्प सही हैं परंतु केवल एक विकल्प को चुना गया है और यह एक सही विकल्प है;

शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);

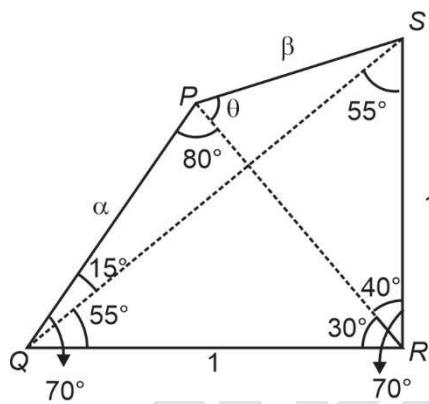
ऋण अंक : -2 अन्य सभी परिस्थितियों में।

9. माना एक समतल में  $PQRS$  एक चतुर्भुज है, जहाँ  $QR = 1$ ,  $\angle PQR = \angle QRS = 70^\circ$ ,  $\angle PQS = 15^\circ$  तथा  $\angle PRS = 40^\circ$ , यदि  $\angle RPS = \theta^\circ$ ,  $PQ = \alpha$  तथा  $PS = \beta$ , तब वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें  $4\alpha\beta \sin\theta^\circ$  का / के मान सम्मिलित है / है।

- (A)  $(0, \sqrt{2})$   
 (B)  $(1, 2)$   
 (C)  $(\sqrt{2}, 3)$   
 (D)  $(2\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

उत्तर (A, B)

हल दर्शाये गए चित्र को दिए गए आँकड़ों के आधार पर खींचा जा सकता है



$\triangle PQR$  में ज्या नियम लागू करने पर,

$$\frac{\alpha}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sin 80^\circ}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2 \sin 80^\circ} \quad \dots \text{(i)}$$

$\triangle PRS$  में ज्या नियम लागू करने पर,

$$\frac{\beta}{\sin 40^\circ} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \beta \sin \theta = \sin 40^\circ \quad \dots \text{(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) से,

$$4\alpha\beta \sin \theta = 4 \cdot \frac{1}{2 \sin 80^\circ} \cdot \sin 40^\circ = \frac{1}{\cos 40^\circ}$$

$$\cos 0^\circ = 1, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ तथा } \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ का प्रयोग करने पर}$$

केवल विकल्प (A) तथा (B) सही हैं।

**10. माना**

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \sin^{2k} \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{माना } g(x) = 2^{\alpha x} + 2^{\alpha(1-x)}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  है।

तब, निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सत्य है / हैं?

- (A)  $g(x)$  का न्यूनतम मान  $2^{7/6}$  है
- (B)  $g(x)$  का अधिकतम मान  $1 + 2^{1/3}$  है
- (C) फलन  $g(x)$  का एक से अधिक बिन्दु पर इसका अधिकतम मान प्राप्त होता है
- (D) फलन  $g(x)$  का एक बिन्दु से अधिक पर इसका न्यूनतम मान प्राप्त होता है

**उत्तर (A, B, C)**

$$\text{हल } \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^k = \frac{1/4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{अतः, } g(x) = 2^{x/3} + 2^{(1-x)/3}$$

$$\text{अब, } g'(x) = \frac{\ln 2}{3} \frac{(2^{2x/3} - 2^{1/3})}{2^{x/3}}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ पर } g'(x) = 0$$

तथा,  $x = \frac{1}{2}$  पर अवकलज के चिन्ह ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित होते हैं, अतः  $x \in [0, 1]$  के लिए  $x = \frac{1}{2}$ ,  $g(x)$  का स्थानीय निम्निष्ठ के साथ-साथ निरपेक्ष निम्निष्ठ के बिन्दु है।

$$\text{अतः, } g(x) \text{ का न्यूनतम मान} = g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2^{1/6} + 2^{1/6} = 2^{7/6}$$

$\Rightarrow$  विकल्प (A) सही है

$g(x)$  का अधिकतम मान या तो  $g(0)$  या  $g(1)$  के बराबर है।

$$g(0) = 1 + 2^{1/3}$$

$$g(1) = 2^{1/3} + 1$$

अतः (B) और (C) भी सही हैं।

- 11.** माना एक सम्मिश्र संख्या  $z$  के सम्मिश्र संयुग्मी को  $\bar{z}$  द्वारा दर्शाया जाता है। यदि  $z$  एक अशून्य सम्मिश्र संख्या है जिसके लिए  $(\bar{z})^2 + \frac{1}{z^2}$  के वास्तविक और काल्पनिक दोनों भाग पूर्णांक हैं, तब निम्नलिखित में से  $|z|$  के संभावित मान कौनसे हैं / हैं?

$$(A) \left( \frac{43 + 3\sqrt{205}}{2} \right)^{1/4}$$

$$(B) \left( \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \right)^{1/4}$$

$$(C) \left( \frac{9 + \sqrt{65}}{4} \right)^{1/4}$$

$$(D) \left( \frac{7 + \sqrt{13}}{6} \right)^{1/4}$$

**उत्तर (A)**

हल माना  $z = r e^{i\theta}$

$$\text{इसलिए, } (\bar{z})^2 + \frac{1}{z^2} = \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2i\theta} = a + ib \text{ (माना), जहाँ } a, b \in \mathbb{Z}$$

$$\text{इसलिए, } \left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow r^8 - (a^2 + b^2 - 2)r^4 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{(a^2 + b^2 - 2) \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 2)^2 - 4}}{2}$$

$a^2 + b^2 = 45$  के लिए (अर्थात्  $(a, b) = (\pm 6, \pm 3)$  या  $(\pm 3, \pm 6)$ )

$$\text{यहाँ } r = \left(\frac{43 + 3\sqrt{205}}{2}\right)^{1/4}$$

12. माना त्रिज्या  $R > 0$  वाला एक वृत्त  $G$  है। माना  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , समान त्रिज्या  $r > 0$  वाले  $n$  वृत्त हैं। माना कि  $n$  वृत्तों  $G_1, G_2, \dots, G_n$  में से प्रत्येक वृत्त,  $G$  को बाह्य रूप से स्पर्श करता है तथा  $i = 1, 2, \dots, n-1$  के लिए, वृत्त  $G_i, G_{i+1}$  को बाह्य रूप से स्पर्श करता है, तथा  $G_n, G_1$  को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। तब निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे कथन सत्य है / हैं?

(A) यदि  $n = 4$ , तब  $(\sqrt{2} - 1)r < R$

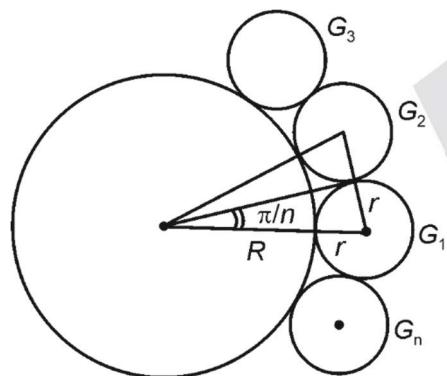
(B) यदि  $n = 5$ , तब  $r < R$

(C) यदि  $n = 8$ , तब  $(\sqrt{2} - 1)r < R$

(D) यदि  $n = 12$ , तब  $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)r > R$

उत्तर (C, D)

हल चित्रानुसार,



$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{r}{R+r}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} + 1 = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow R = r \left[ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 \right]$$

(A)  $n = 4, R = r(\sqrt{2} - 1)$

(B)  $n = 5, R = r\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{5} - 1\right)$

$$\Rightarrow R < r \left( \cosec \frac{\pi}{6} - 1 \right) \Rightarrow R < r$$

$$(C) n = 8, R = r \left[ \cosec \left( \frac{\pi}{8} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow R > r \left( \cosec \left( \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right)$$

$$\Rightarrow R > r(\sqrt{2} - 1)$$

$$(D) n = 12, R = r \left[ \cosec \left( \frac{\pi}{12} \right) - 1 \right]$$

$$\Rightarrow R = \left[ \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) - 1 \right] r$$

$$\Rightarrow R < \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1) r$$

13. माना  $\hat{i}, \hat{j}$  तथा  $\hat{k}$  इकाई सदिश हैं, जो तीन धनात्मक निर्देशांक अक्षों के अनुदिश हैं। माना

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \\ \vec{b} &= \hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}, \quad b_2, b_3 \in \mathbb{R}, \\ \vec{c} &= c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

तीन सदिश हैं जबकि  $b_2 b_3 > 0$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  तथा

$$\begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 \\ 1 - c_2 \\ -1 - c_3 \end{pmatrix}.$$

तब, निम्नलिखित में से कौनसा / कौनसे विकल्प सत्य है / हैं?

$$(A) \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(B) \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$(C) |\vec{b}| > \sqrt{10}$$

$$(D) |\vec{c}| \leq \sqrt{11}$$

उत्तर (B, C, D)

$$\text{हल } [\hat{i} \hat{j} \hat{k}] \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = [\hat{i} \hat{j} \hat{k}] \begin{pmatrix} 3 - c_1 \\ 1 - c_2 \\ -1 - c_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} - \vec{c} \quad \dots(i)$$

$$\Rightarrow (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

पुनः समीकरण (i) से

$$(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{c}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta, \text{ जहाँ } \theta = \vec{a} \wedge \vec{c}$$

$$\Rightarrow |\vec{c}| \geq |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{c}| \leq \sqrt{11}$$

दिया है कि  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow b_2 - b_3 + 3 = 0$

$$\Rightarrow b_3 - b_2 = 3$$

तथा  $b_2 \cdot b_3 > 0$

$$\text{अब } |\vec{b}|^2 = 1 + b_2^2 + b_3^2$$

$$= 1 + (b_3 - b_2)^2 + 2b_2b_3$$

$$= 10 + 2b_2b_3$$

$$\Rightarrow |\vec{b}|^2 > 10 \Rightarrow |\vec{b}| > \sqrt{10}$$

14.  $x \in \mathbb{R}$  के लिए, माना फलन  $y(x)$  अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 12y = \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right), \quad y(0) = 0.$$

के हल हैं। तब, निम्नलिखित कथनों में से कौनसा/कौनसे कथन सत्य है/हैं?

- (A)  $y(x)$  एक वर्धमान फलन है
- (B)  $y(x)$  एक छासमान फलन है
- (C) एक वास्तविक संख्या  $\beta$  विद्यमान है जबकि रेखा  $y = \beta$ , वक्र  $y = y(x)$  को अपरिमित रूप से अनेक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है
- (D)  $y(x)$  एक आवर्ती फलन है

उत्तर (C)

$$\text{हल } \frac{dy}{dx} + 12y = \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right)$$

$$\text{समाकलन गुणांक} = e^{12x} \Rightarrow y \cdot e^{12x} = \int e^{12x} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) dx + C$$

$$\Rightarrow y \cdot e^{12x} = \frac{e^{12x}}{12^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^2} \left[ 12 \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) \right] + C$$

$$\therefore y(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{12}{12^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^2}$$

$$\text{इसलिए } y = \frac{1}{\lambda} \left[ \underbrace{12 \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right)}_{f_1(x)} - 12e^{-12x} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} \left[ \underbrace{-\pi \sin\left(\frac{\pi x}{12}\right) + \frac{\pi^2}{12^2} \cos\left(\frac{\pi x}{12}\right) + 12e^{-12x}}_{f_2(x)} \right]$$

जब  $x$  का मान अधिक है तब  $12e^{-12x}$  का मान शून्य है।

लेकिन  $f_2(x)$ ,  $\left[ -\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^4}, \sqrt{\pi^2 + \left(\frac{\pi}{12}\right)^4} \right]$  में स्थित है।

अतः  $\frac{dy}{dx}$ , अपने चिन्ह परिवर्तित करता है।

इसलिए  $y(x)$ , सभी वास्तविक संख्या के लिए एकदिष्ट नहीं है।

तथा जब  $x$  का मान बहुत अधिक हो तब पुनः  $-12e^{-12x}$  लगभग शून्य है लेकिन  $f_1(x)$  आवर्तकाल है, इसलिए कुछ  $\beta$  विद्यमान है जिसके लिए  $y = \beta$ , अपरिमित रूप से अनेक बिन्दुओं पर  $y = y(x)$  को प्रतिच्छेद करता है।

### खण्ड – 3 (अधिकतम अंक : 12)

- इस खण्ड में चार (04) प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) व (D) दिए गए हैं। इन चार विकल्पों में से केवल एक विकल्प सही उत्तर है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही उत्तर से संबंधित विकल्प को चुनिए।
- प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार होगा:

पूर्ण अंक : +3 यदि केवल सही विकल्प को चुना गया है;

शून्य अंक : 0 यदि किसी भी विकल्प को नहीं चुना गया है (अर्थात् प्रश्न अनुत्तरित है);

ऋण अंक : -1 अन्य सभी परिस्थितियों में।

- 15.** 4 बॉक्स पर विचार कीजिए, जहाँ प्रत्येक बॉक्स में 3 लाल गेंदे तथा 2 नीली गेंदे हैं। माना कि सभी 20 गेंदे भिन्न हैं। उन तरीकों की संख्या कौनसी हो सकती हैं जिसमें इन 4 बॉक्स में से 10 गेंदों को इस प्रकार चयनित किया जाता है कि प्रत्येक बॉक्स में कम से कम एक लाल गेंद तथा एक नीली गेंद का चयन किया जा सके?

- (A) 21816  
 (B) 85536  
 (C) 12096  
 (D) 156816

उत्तर (A)

हल

	$3R$ $2B$	$3R$ $2B$	$3R$ $2B$	$3R$ $2B$
	बॉक्स-1	बॉक्स-2	बॉक्स-3	बॉक्स-4
स्थिति I	4 गेंदे	2 गेंदे	2 गेंदे	2 गेंदे
स्थिति II	3 गेंदे 2R 1B 2B 1R	3 गेंदे 2R 1B 2B 1R	2 गेंदे	2 गेंदे

 ${}^4C_1 [3 \text{ लाल } 1 \text{ नीली } 2 \text{ लाल } 2 \text{ नीली}] + \text{स्थिति II}.$ 

$$= {}^4C_1 [{}^2C_1 + {}^3C_1] ({}^3C_1 {}^2C_1)^3 + {}^4C_2 [{}^3C_2 {}^2C_1 + {}^3C_1 {}^2C_2]^2 [{}^3C_1 {}^2C_1]^2$$

$$= 4(5)(6)^3 + 6(3 \times 2 + 3)^2 (6)^2$$

$$= 4320 + 17496$$

$$= 21816 \text{ (विकल्प A)}$$

16. यदि  $M = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , तब निम्नलिखित आव्यूह में से कौनसा विकल्प  $M^{2022}$  के बराबर है?

(A)  $\begin{pmatrix} 3034 & 3033 \\ -3033 & -3032 \end{pmatrix}$

(B)  $\begin{pmatrix} 3034 & -3033 \\ 3033 & -3032 \end{pmatrix}$

(C)  $\begin{pmatrix} 3033 & 3032 \\ -3032 & -3031 \end{pmatrix}$

(D)  $\begin{pmatrix} 3032 & 3031 \\ -3031 & -3030 \end{pmatrix}$

उत्तर (A)

हल  $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

तथा इसी प्रकार

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{3n}{2} + 1 & \frac{3n}{2} \\ -\frac{3n}{2} & -\frac{3n}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

अब,

$$A^{2022} = \begin{pmatrix} \frac{3 \times 2022}{2} + 1 & \frac{3 \times 2022}{2} \\ \frac{-3 \times 2022}{2} & \frac{-3 \times 2022}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3034 & 3033 \\ -3033 & -3032 \end{pmatrix}$$

∴ विकल्प (A) सही है।

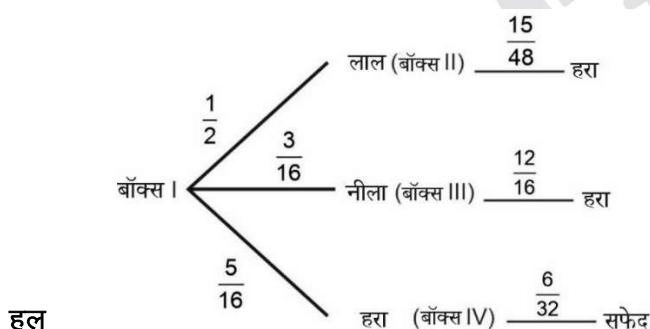
## 17. माना कि

बॉक्स- I में 8 लाल, 3 नीली तथा 5 हरी गेंदे हैं,  
 बॉक्स -II में 24 लाल, 9 नीली तथा 15 हरी गेंदे हैं,  
 बॉक्स -III में 1 नीली, 12 हरी तथा 3 पीली गेंदे हैं,  
 बॉक्स -IV में 10 हरी, 16 नारंगी तथा 6 सफेद गेंदे हैं

बॉक्स-।; से एक गेंद को यादृच्छिक रूप से चयनित किया जाता है। इस गेंद को  $b$  कहा गया है। यदि  $b$  लाल है तब बॉक्स-॥ से यादृच्छिक रूप से एक गेंद को चयनित किया जाता है, यदि  $b$  नीली है तब बॉक्स-॥। से यादृच्छिक रूप से एक गेंद को चयनित किया जाता है, तथा यदि  $b$  हरी है तब बॉक्स-IV से यादृच्छिक रूप से एक गेंद को चयनित किया जाता है। घटना “चयनित गेंदों में से एक सफेद गेंद है” के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता का मान कौनसा है, दिया गया है कि घटना “चयनित गेंदों में से कम से कम एक हरी गेंद है”?

- (A)  $\frac{15}{256}$       (B)  $\frac{3}{16}$   
 (C)  $\frac{5}{52}$       (D)  $\frac{1}{8}$

उत्तर (C)



स्थिति A : चयनित गेंदों में से एक गेंद सफेद है।

B : चयनित गेंदों में कम से कम एक गेंद हरी है

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\frac{5}{16} \times \frac{6}{32}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{48} + \frac{3}{16} \times \frac{12}{16} + \frac{5}{16} \times 1}$$

$$= \frac{5}{52}$$

18. धनात्मक पूर्णांक  $n$  के लिए,  $f(n) = n + \frac{16+5n-3n^2}{4n+3n^2} + \frac{32+n-3n^2}{8n+3n^2} + \frac{48-3n-3n^2}{12n+3n^2} + \dots + \frac{25n-7n^2}{7n^2}$  परिभाषित है।

तब,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  का मान है

(A)  $3 + \frac{4}{3} \log_e 7$

(B)  $4 - \frac{3}{4} \log_e \left(\frac{7}{3}\right)$

(C)  $4 - \frac{4}{3} \log_e \left(\frac{7}{3}\right)$

(D)  $3 + \frac{3}{4} \log_e 7$

उत्तर (B)

हल

$$\begin{aligned} f(n) &= n + \frac{16+5n-3n^2}{4n+3n^2} + \frac{32+n-3n^2}{8n+3n^2} + \dots + \frac{25n-7n^2}{7n^2} \\ &= \left( \frac{16+5n-3n^2}{4n+3n^2} + 1 \right) + \left( \frac{32+n-3n^2}{8n+3n^2} + 1 \right) + \dots + \left( \frac{25n-7n^2}{7n^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$f(n) = \frac{9n+16}{4n+3n^2} + \frac{9n+32}{8n+3n^2} + \dots + \frac{25n}{7n^2}$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{9n+16r}{4rn+3n^2} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{9+16\left(\frac{r}{n}\right)}{4\left(\frac{r}{n}\right)+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \int_0^1 \frac{9+16x}{4x+3} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(16x+12)-3}{4x+3} dx$$

$$= \left[ 4x - \frac{3}{4} \ln |4x+3| \right]_0^1$$

$$= 4 - \frac{3}{4} \ln \frac{7}{3}$$

□ □ □